



TITLE:

# 大域結合カオス系の集団運動( Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

守田, 智

---

CITATION:

守田, 智. 大域結合カオス系の集団運動. 京都大学, 1997, 博士(理学)

ISSUE DATE:

1997-05-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3124972>

RIGHT:

学位申請論文  
大域結合カオス系の集団運動

守田 智

平成9年2月

### Abstract

カオス的な振動をするエレメントからなるネットワークの集団運動の研究を行なった。モデルとして大域結合カオス写像を用いる。個々のエレメントのローカルな運動と全体としての集団運動との関係が調べられる。大域結合系の状態は分布関数のダイナミクスによって表現することができる。分布関数を有限個の変数で近似することにより数値計算を行ない、分布関数の定常解の安定性解析を試みた。エレメント間の結合が弱い時、リアプノフ数はスケーリング則に従っている。このスケーリング則を近似的に導いた。結合が強い場合にはスケーリング則を破る。その時のリアプノフ数は、集団運動と深く関わっているが、その関係を分布関数のダイナミクスから考察する。

## 謝辞

この研究を進めるにあたり たくさんの人にお世話になりました。御協力いただいたすべての方に 感謝します。蔵本由紀教授には、5年間にわたり色々な面でお世話になりました。数多くの議論や助言を通して 常に研究の指針を与えてもらいました。茶碗谷毅博士には、常に有意義な議論をしていただきました。水口毅博士には、いつも研究室における私の活動を支えていただき、また 研究内容についても多くの意見をいただきました。佐々真一助教授には、色々なアイデア・示唆をいただきました。金子邦彦教授には、いつも貴重な意見をいただきました。足立聡博士の作った数値計算のアプリケーションなければこの研究の一部はできなかったでしょう。佐野雅己助教授には、貴重な指摘をいただきました。狐崎創氏、中川尚子博士、篠本滋助教授をはじめとする非線形動力学研究室のメンバーと出身者、また計算機管理者をはじめとする物性理論の関係者に色々な面でお世話になりましたことを感謝します。

なお、この研究で用いた数値計算の結果の一部は京都大学基礎物理学研究所のワークステーションで行ないました。

# 目次

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	はじめに	4
1.2	大自由度力学系	4
1.3	エレメントと相互作用・大域結合の導入	5
<b>2</b>	<b>モデルの紹介</b>	<b>8</b>
2.1	大域結合写像系	8
2.2	大域結合ロジスティック写像系の性質の概観	9
2.3	大域結合テント写像系の特性	11
2.3.1	シンクロナイズ状態	11
2.3.2	デシンクロナイズ状態・1 (1バンド状態)	12
2.3.3	デシンクロナイズ状態・2 (2バンド状態)	14
2.3.4	デシンクロナイズ状態・3 (バンドなし状態)	14
<b>3</b>	<b>分布関数を用いた解析</b>	<b>16</b>
3.1	Nonlinear Frobenius-Perron Equation	16
3.2	有限次元近似	17
3.3	安定性解析	22
3.4	考察	29
<b>4</b>	<b>Lyapunov Analysis</b>	<b>31</b>
4.1	準備	31
4.2	リアプノフ数の変化	32
4.3	ローカルな軌道発散率との差	34
4.4	ランダム近似	37
4.5	リアプノフスペクトル	38
4.6	分布関数の軌道拡大率	42
4.7	境界領域	43

4.8 考察 . . . . .	44
5 議論とまとめ . . . . .	47
5.1 議論 . . . . .	47
5.2 まとめ . . . . .	47
A ランダム近似によるリアプノフ数の計算 . . . . .	49
参考文献 . . . . .	53

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 はじめに

大自由度カオス力学系の集団運動は、個々のエレメントが持つカオス性のため複雑になっている。この複雑性のため その理論的研究は、発展途上にあるといえる。本論文では 大域結合カオス写像系を用い、その集団運動の解析を試みた。まずは、研究の背景となる事柄を本章にまとめた。

### 1.2 大自由度力学系

自然現象に見られる不規則な運動を決定論的な方程式で記述することを考えよう。決定論的な方程式から生じる不規則な運動は、カオスと呼ばれている。ローレンツアトラクターは、カオスのもっとも有名な例の一つである。ローレンツのモデルは、3変数の微分方程式によって大気の流れを記述しようとして作られたものであるが、この系の運動の予測不可能性は、ローレンツマップと呼ばれる1次元写像で理解することができる。

今日まで、ローレンツモデルなど3変数の微分方程式または1次元写像によるカオスは非常によく研究されきた。これを拡張した形で4変数以上の微分方程式または2次元以上の写像の研究も行なわれている。このような少数自由度のカオスの性質について多くのことが分かるようになった。少数の自由度による記述は、隷従原理に基づく少数の有効な変数の抽出によって正当化される。しかし、自然界で見られる不規則な運動には、さらに有効な自由度が大きいものが多数存在している。例えば、システムサイズの増加に伴い、その有効な自由度も増加するようなモデ



ルで考えねばならないような系が存在している。

このような大きい自由度を持つ運動の例の一つとして時空カオスを挙げる事ができる。時空カオスは、時間に対してだけでなく空間に対しても不規則な振舞いを示し、ペナール対流・液晶対流・テイラー流・化学反応拡散系・生物によるネットワークなどでみられる。これらの運動は、Ginzburg Landau model や Kuramoto-Sivashinsky equation など Partial differential equations でモデル化することができるが [1, 2]、Coupled Map Lattice や Cellular automata のような離散モデルも解析のためよく使われる。

このような離散モデルは、基本方程式から直接導かれるのではなく、経験的に系が持つ特徴を抽出することによって導かれる。抽象的なモデル化を行なう場合、表現しようとしている系のどのような性質が再現でき、どのような性質が失われるかを明らかにしておくことは重要である。抽象的なモデル化は 個々の系が持つ細かい性質の違いによらない一般的な特徴を捉えるのに役立つと考えられる。

本論文では、空間の概念を考えない単純化したモデルを扱う。これは次節で述べられるように、大域的な結合を導入することによって作られる。このようなモデルは、大自由度カオスのもっとも簡明な例である。大自由度カオスの研究には数値計算を欠かすことができないため、簡明なモデルを使い解析することは大変有効である。ここで使われるモデルでは、より理論的な解析も可能であることが示される。

### 1.3 エレメントと相互作用・大域結合の導入

非平衡開放系で見られるパターン形成や時空カオスを解析する際、どれくらいのスケールでの振舞を見たいかという事とどれくらいのスケールのエレメントを用いたモデルで記述するかという事とは、非常に重要である。例えば、通常の流体力学では、その中の1つの分子の運動のような小さいスケールでの振舞ではなく 熱力学的な量（圧力・温度など）が定義されるくらいのスケールでの振舞に興味があり、その解析には、十分の多くの分子の集まりと考えられる流素により記述されたナビエ・ストークス方程式を用いられる。別の例として生態学の場合では、ある動物の個体数の時間変化に興味がある時エレメントとして動物1匹を取る記述も考えられるが、場所ごとでの個体数の密度を用いた記述も考えられるだろう。

モデルのエレメントのスケールは、見たい振舞のスケールより小さい



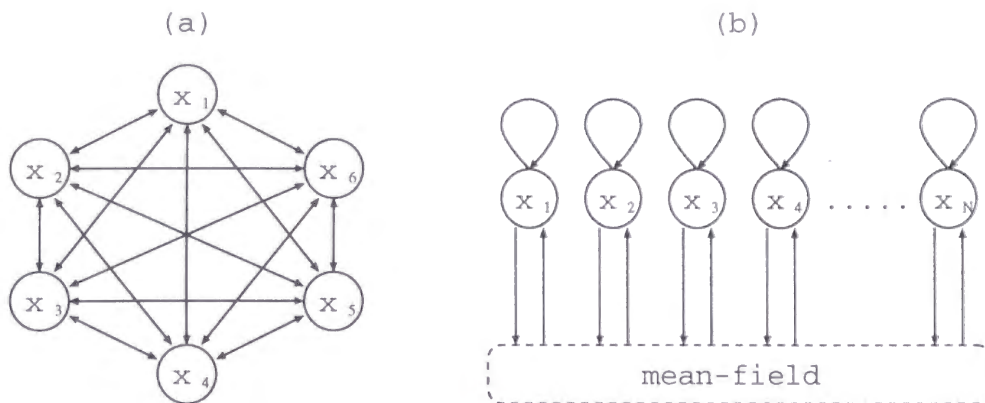


Figure 1.1: 大域結合力学系の模式図

か等しくなくてはならないが、必要以上に小さいスケールでの記述では、エレメントの個数が膨大になり解析が事実上不可能になり好ましくない。ここでいうのエレメントは、微視的な内部構造を持ち、それ自体で独自のダイナミクスを持つ動的素子である。モデルの特徴は、このエレメント自体が持つ運動とエレメント間の相互作用との形態によって決まる。

ここでは、系を構成するすべてのエレメントがそれぞれ同じ相互作用している場合を考える。このモデルは、エレメント間の相互作用が距離によらず一定であると考えてよい場合に有効である。模式的に 図 1.1(a) のように表され、このような結合は 大域結合 (Global Coupling) と呼ばれている。

大域結合力学系で考察された現象の例としてホタルの点滅の同期現象がよく挙げられる。東南アジアに住むタイホタルの雄は、求愛行動の時に周期的な点滅を見せる。ホタルは 1 匹しかいなくても点滅することができるので、1 匹のホタルを周期的なダイナミクスを持つエレメントと考えることができる。また、1 匹のホタルは他のホタルの光を感じることができるので、光による相互作用を考えないといけない。届く光の強さは距離に依存するが強さより光が来ているか来ていないかということが重要だと考え、距離による依存性を考慮しない相互作用が用いられる。このモデルでは、図 1.1 (a) の  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) がホタルを表し、矢印が光による相互作用を表している。エレメントに適当な周期的ダイナミクスを導入した解析がなされ点滅の同期が説明されている。同期現象が起こればホタルが個別に持っているだろう点滅の周期は表に現れず、全体としての周期だけが表に現れるようになる。このような現象は、集団運動の典型といえる。

大域結合は、別の視点から導入することもできる。すべてのエレメントが1つの「場」によって間接的に相互作用していると考えるのである(図 1.1(b))。例えば、食物を共有する生物  $x$  の集合を考える時、食物が「場」となって 個体同士に結合が生じるような場合である。食物が空間的に一様であるといえる条件下では、「場」が平均場とし働き、すべての個体に等しい平均場 (mean-field) が作用する。この状況は、「場」となる量の拡散にかかる時間がエレメントのダイナミクスの時間スケールに比べ十分短いという極限で成立する。

平均場による結合の他の代表例として非線形素子 (ジョセフソン素子など) を並列に繋げた電気回路を挙げておく。この場合に すべての非線形素子にかかっている電圧は、等しいと見なせ、この電圧が平均場の役割を果たす。非線形素子の電圧に対する応答がエレメントのダイナミクスを決めている。電気回路を用いた実験による大自由度力学系の研究も行なわれている (例えば [16])。

大域結合以外の相互作用として いろいろな相互作用も考えられる。格子を導入して 格子の交点上にエレメントがあると考え、最近接格子のエレメント同士のみ結合させるモデルが多く of the 局面で用いられている [52]。これは、相互作用が短い距離でのみ効くような場合の近似である。この場合にも 格子の次元を大きくしていくと大域結合に近付くと考えられる。表 1.1 に頻繁に用いられるモデルを分類列举した。表に書かれたもの以外に 最近接以外も距離に依存した強さで結合するモデルや、エレメントの対をランダムに選ぶことで結合を導入したモデルなどもしばしば用いられる。

この節で エレメント間の直接的な相互作用 と平均場による間接的な相互作用との 2つの視点により大域結合を考えた。この2つは、視点が違うだけで本質的に同じ結合を表している。後でわかるように、これら 2つの見方を使い分けて考察することが有効である。

モデル		時間	空間	状態
偏微分方程式		連続	連続	連続
結合常微分方程式	最近接結合	連続	不連続	連続
	大域結合	連続	—	連続
結合写像	最近接結合	不連続	不連続	連続
	大域結合	不連続	—	連続
セル オートマトン		不連続	不連続	不連続

Table 1.1: 主なモデルの形態。— は空間の概念がないことを示している。

## Chapter 2

### モデルの紹介

大域結合カオス写像のよく知られた性質について説明する。本論文では、結合させる写像としてテント写像を用いるが、比較のため大域結合ロジスティック写像の特徴も紹介する。

#### 2.1 大域結合写像系

前節でエレメント間の相互作用として大域結合を導入した。エレメントのダイナミクスとして時間が離散的である写像を用いた時、大域結合写像系 (Globally Coupled Maps) と呼ぶ。ここでは 拡散の効果を考慮して相互作用が引力として働くこととエレメントのカオス性との2点を仮定することによりモデル方程式を与える。相互作用が引力なので2つのエレメントの値は近付こうとする傾向がある。一方でカオスの軌道不安定性により近い値を持つエレメントは離れていこうとする傾向がある。この2つの傾向の競合により複雑な振舞いが見られる。

よく使われるモデル方程式は、次の式のように書くことができる<sup>1</sup>。

$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{i'=1}^N \{f(x_n(i')) - f(x_n(i))\} \quad (2.1)$$

ここで  $n$  は 離散時間、 $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) はエレメントを区別するための番号、 $N$  は系を構成するエレメントの数、 $\epsilon$  は相互作用の強さを表している。写像  $f(x)$  はエレメントのダイナミクスを決めており、カオスを呈するものとする。結合は (2.1) の最後の和の項に入っている。これはエ

---

<sup>1</sup>このモデルでは、すべてのエレメントが同一のダイナミクスを持つことに注意。エレメントに差異があるモデルを考えることもできる [29]。

レメント間の状態の差による線形なものであり、 $\epsilon$  を正にとるとすると、状態の差が小さくなるような効果を及ぼす。

このように、モデル方程式 (2.1) は、図 1.1(a) の模式図で表現された視点で書かれていることが分かる。式 (2.1) は、次のように変形することができる。

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{i'=1}^N f(x_n(i')) \quad (2.2)$$

大域結合写像に関する文献の多くでこの形でモデルを与えている。この式の最後の和の項を平均場として

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \epsilon h_n \quad (2.3)$$

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_n(i)) \quad (2.4)$$

と書き換えられるので、図 1.1(b) の模式図の視点で見ることができる。図 1.1(b) で曲線の矢印で示した個々のエレメントのダイナミクスは、1次元写像  $(1 - \epsilon)f(x)$  により決まる。また、下向きの矢印は式 (2.4) によって平均場が決まることを表し、上向きの矢印は式 (2.3) の最後の項にあるように平均場  $h_n$  による平行移動を示している。

## 2.2 大域結合ロジスティック写像系の性質の概観

前節で大域結合写像系として式 (2.1) あるいは式 (2.3) によりモデルを導入した。実際モデルの考察を行なうためには、1次元写像  $f(x)$  の形を決める必要がある。本論文では、 $f(x)$  としてテントマップを用いるが、テントマップのケースは、次節から扱うことにする。ここでは、 $f(x)$  をロジスティックマップにした時の研究が以前から広く行なわれていることをふまえ、ロジスティックマップの大域結合系における性質を紹介する。これらの性質は、金子の研究により得られたものである [8, 17, 18]。

ロジスティックマップとして  $f(x) = 1 - ax^2$  を考える。 $a$  は非線形の度合を決めるパラメーターで  $a > 1.401155189\dots$  を満たす時 periodic window を除くと 1次元写像  $x_{n+1} = f(x_n)$  はカオス的なアトラクターを持つ。大域結合系は、 $a$  と  $\epsilon$  との2つのパラメーターの値により、様々な形態を持ちうる。いくつかのエレメント同士が同じ値をもつようになるクラスタリング現象が知られている。同じ値を持ったエレメントのグ



ループをクラスターと呼ぶ。クラスターの個数を  $k$  とするとそれぞれのクラスターに含まれるエレメントの数を  $N_1, N_2, \dots, N_k$  と書け、この組合せでアトラクターを分類することができる。

さらに金子は、クラスターの形態により4つの相に分類した。(1) コヒーレント相：ほとんどすべての初期条件で  $k=1$  となるアトラクターに落ちる。すべてのエレメントは同一の運動をしており、系は1次元に縮退している。(2) 秩序相： $k \ll N$  のアトラクターがみられる。(3) 部分秩序相： $k \ll N$  と  $k \sim N$  とのアトラクターが共存する。(4) 乱流相： $k \sim N$  のアトラクターがみられる。相図は、[7] に与えられている。

クラスタリングは 大域結合系に特有な現象であり、周期的な振動子を大域結合した系でも見られる。本来、同一であるエレメントがいくつかクラスターに分離し別の運動をするようになる様子は、生物の形態形成をイメージさせるかも知れない。クラスタリングが顕著な秩序相・部分秩序相に関する研究は、生物学的な見地からも行なわれている [11]。

クラスタリングが起こらないといえる乱流相では、エレメントが個々のカオス的なダイナミクスに従い無秩序に運動しているように見える。しかし、エレメント同士に何の相関もないと仮定して平均場  $h_n$  の運動を調べると矛盾が生じる。すなわち、平均場  $h_n$  を  $N$  個のランダムな変数の総和であると仮定すると 平均場のゆらぎ

$$\sqrt{\langle (h_n - \langle h_n \rangle)^2 \rangle} \quad (2.5)$$

は エレメントの個数  $N$  を大きくしていく時 大数の法則から  $1/\sqrt{N}$  に従うと考えられる。ここで  $\langle \rangle$  は 時間平均を表す。実際、数値計算を行なうと 2.5 は、パラメーター  $a$  と  $\epsilon$  に依存して決まる  $N$  以上では大数の法則に従わない。これは、エレメント間に なんらかの相関があり全体として集団的な運動が存在することを意味している。また、平均場の時系列のパワースペクトルに個々のエレメントにはないピークがあることも知られており、集団運動の周期性が示唆される。

大域結合ロジスティック写像系の研究は、今なお 行なわれている。乱流相における集団運動や クラスター状態間の遷移などについては、詳しく理解されていないようだ。リアプノフスペクトル・エレメント間の相関・periodic window の影響・ノイズを加えた場合など少なからぬ研究者により調べられている。これら仕事は参考文献に挙げておいた。

## 2.3 大域結合テント写像系の特性

### 2.3.1 シンクロナイズ状態

これ以降、エレメントとしてテントマップ  $f(x) = 1 - a|x|$  をとったモデルの考察を行なう [18, 19]。パラメーター  $a$  は、1 から 2 の間にとる。エレメントの取る値は、有界で  $[-1, 1]$  の外に出ることはない。この節ではモデルの特性を紹介し、次章からの解析の背景を述べる。

大域結合テントマップが大域結合ロジスティックマップと著しく異なる点は、クラスタリングが生じないことである。このため、系は次の2つの状態に分けることができる。1つはすべてのエレメントが等しい値を持つ状態でありこれをシンクロナイズ状態と呼ぶ。また、もう一方はすべてのエレメントが別々の値を持つ状態でありデシンクロナイズ状態と呼ぶ。シンクロナイズ状態はコヒーレント相に対応するものであり、デシンクロナイズ状態は乱流相に対応していると考えられ、この意味で秩序相・部分秩序相に対応する状態はないといえる。

シンクロナイズ状態では、系は1次元に縮退しており、モデルを式(2.1)で表現した場合の結合を表す和の項は消え、エレメントの運動はマップ  $x_{n+1} = f(x_n)$  に従う。式(2.3)と(2.4)とでの表現を考慮すると平均場  $h_n$  が  $h_{n+1} = f(h_n)$  のように1次元ダイナミクスで表されることに気付く。この状態の安定条件は、次のように求めることができる。シンクロナイズ状態  $x_n^{syn} \equiv x_n(1) = x_n(2) \dots = x_n(N)$  からの摂動を  $\delta x_n(i) = x_n(i) - x_n^{syn}$  として線形近似して

$$\begin{pmatrix} \delta x_{n+1}(1) \\ \delta x_{n+1}(2) \\ \vdots \\ \delta x_{n+1}(N) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_n(1) \\ \delta x_n(2) \\ \vdots \\ \delta x_n(N) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

と書くとヤコビ行列  $A$  は次のように決まる。

$$A = \text{sgn}(-x_n^{syn}) \begin{pmatrix} a(1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{N}) & a\frac{\epsilon}{N} & \dots & a\frac{\epsilon}{N} \\ a\frac{\epsilon}{N} & a(1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{N}) & \dots & a\frac{\epsilon}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\frac{\epsilon}{N} & a\frac{\epsilon}{N} & \dots & a(1 - \epsilon + \frac{\epsilon}{N}) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

ここで  $\text{sgn}(x)$  は、 $x > 0$  なら 1、 $x < 0$  なら -1 を表すものとする。行列  $A$  の固有値は容易に求められる。最大固有値の絶対値は  $a$  であり、1 より大きくとっているが、これはすべてのエレメントが同一の動きをす

るモードなのでシンクロナイズ状態の安定性には関係がない。最大以外の  $N-1$  個の固有値の絶対値はすべて  $a(1-\epsilon)$  となり縮退している。シンクロナイズ状態の安定条件は、

$$a(1-\epsilon) < 1 \quad (2.8)$$

となる。図 1.1(b) の見方、すなわち、式 (2.3) でモデルを表した場合にエレメント自体のローカルなダイナミクスは、平均場による平行移動を除けば

$$x_{n+1}(i) = (1-\epsilon)(1-a|x_n(i)|) \quad (2.9)$$

と表すことできることを考えると、上の条件はエレメントがカオスをもたないことに対応している。実際に、この条件で数値計算を行なうと常にシンクロナイズ状態が見られる。

### 2.3.2 デシンクロナイズ状態・1 (1バンド状態)

$a(1-\epsilon) > 1$  の条件で興味深い振舞が見られる。この時、近い値を持つエレメントの対が必ず離れていく傾向にある。このためいかなるクラスターも不安定であり、すべてのエレメントが異なった値を持つデシンクロナイズ状態になる。 $a = 1.99$  に固定していくつかの  $\epsilon$  をとった時の平均場のリターンマップとエレメントがとる値の分布  $\rho_n(x)$  とを図 2.1 に示した。ここで使う分布関数  $\rho_n(x)$  は、ある瞬間  $n$  での  $x_n(i)$  の分布によるものであり、1次元マップの統計的な性質を考える時によく使われる長時間平均による分布ではないことを注意しないといけない。よってこの分布関数  $\rho_n(x)$  は時間変化しており、図 2.1 はそのスナップショットの一例である。

図 2.1(a) に見られるように  $a(1-\epsilon)$  がほぼ 1 に近いようなパラメータ領域で、平均場の運動は、元の 1 次元テントマップに似たものになっている。これは、図 2.1(b) から分かるようエレメント同士が近い値をとることによる。この場合の分布関数自体が激しくカオス的に振動する。すべてのエレメントが正あるいは負になる時、平均場は  $h_{n+1} = 1 - a|h_n|$  をみたしテントマップに厳密に一致する。例えば、図 2.1(b) ではすべて負になっている。しかし、時間によって正負が混ざった分布になるのでその時はテントマップからずれる。この効果は、図 2.1(a) のマップの山の頂上のほやけた部分に現れている。

この状態では、図 2.1(a) のようにエレメントが 1 つの部分に集まっているのでこれを 1 バンドと呼ぶ [18]。



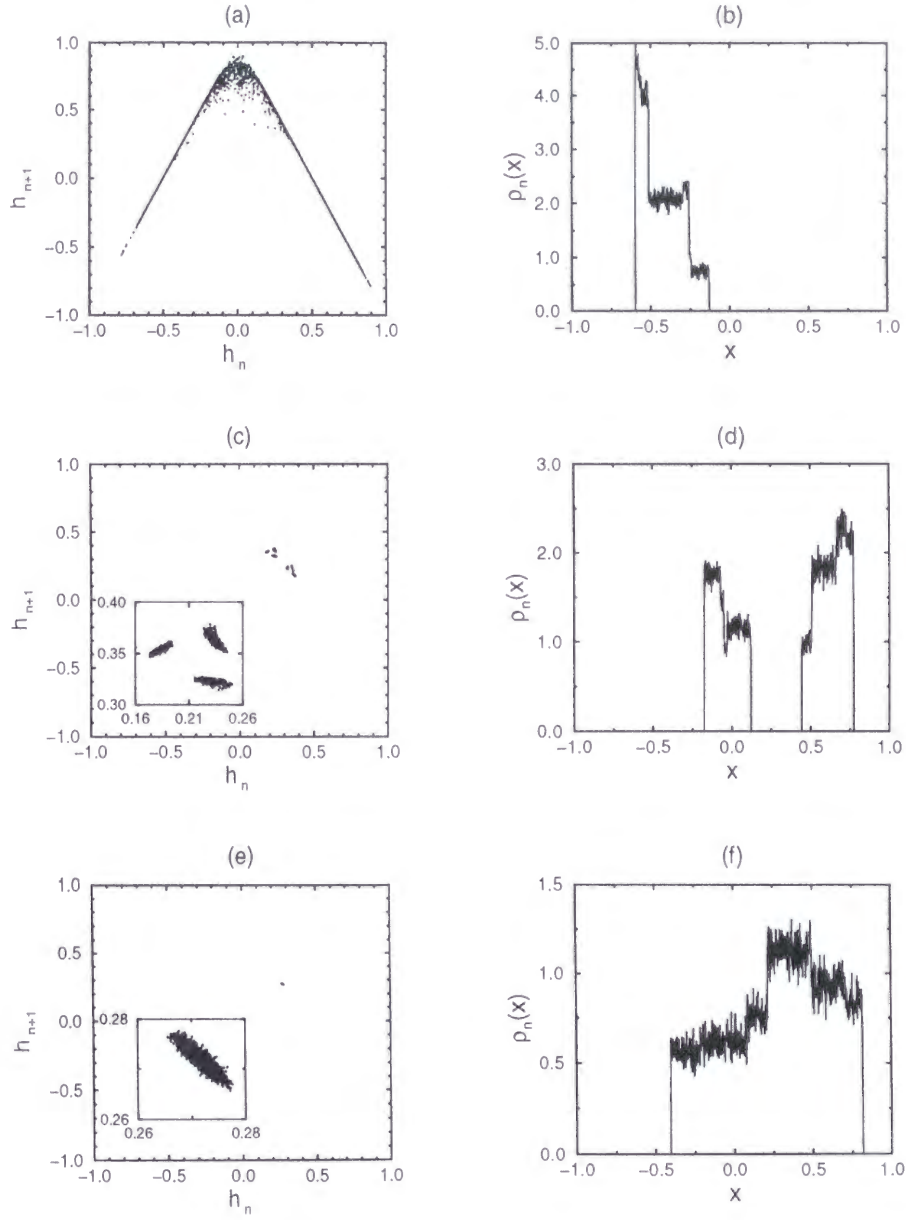


Figure 2.1: デシンクロナイズ状態の例。(a),(c),(e)は、平均場のリターンマップで挿入図はそれを拡大したものである。また、(b),(d),(f)は $x_n(i)$ 分布のスナップショットである。パラメータは、(a),(b)が $a = 1.99\epsilon = 0.45$ 、(c),(d)が $a = 1.99\epsilon = 0.35$ 、(e),(f)が $a = 1.99\epsilon = 0.25$ であり、いずれの場合も  $N = 100000$  として、分布関数は1024の区間に分けて計算した。

### 2.3.3 デシンクロナイズ状態・2 (2バンド状態)

$a(1-\epsilon)$  がより小さい場合に 分布関数の正になっている範囲が2つ以上の領域からなるような状態が見られるようになる。このような状態は、バンドと呼ばれる。図 2.1(c) の例は分布関数が2つの部分からなっているので2バンドと呼ぶ。このようなバンド構造は 大域結合ロジスティックマップのクラスターに似ているともいえるが、クラスターの場合は 分布関数がデルタ関数的になる一方、バンドには 分布に幅があるという著しい違いがある。テント写像の傾きを大きく取っている場合 ( $a \sim 2$ ) にはバンドの数が2より大きい状態は見られない (相図は [18])。  $a$  を小さくしていくと、より大きい数のバンドが現れるようになる。

バンドは、図 1.1(b) の見方でのエレメント自体のダイナミクス (2.3) がエルゴード性を失っていることより生じる。式 (2.3) を無限大の  $N$  に対して結合項が一定であると考ええると、エルゴード性が保たれている場合には そのインバリアント・メジャーに漸近するが、エルゴード性を失っている場合には 初期条件に依存して別々の周期的アトラクターに近づく。周期的アトラクターは、写像 (2.9) の分布関数が独立な2つ以上の部分からなることに由来しており、写像 (2.3) の傾きが  $\sqrt{2}$  より小さい時に生じる。有限の結合を考えた時も 分布関数が2つ以上の部分からなることに変わりなく、バンドが  $a(1-\epsilon) < \sqrt{2}$  の条件で存在することが分かる。

$a(1-\epsilon) < \sqrt{2}$  で2バンド状態になることが分かるが、同様に  $a(1-\epsilon) < 2^{1/4}$  で4バンド、 $a(1-\epsilon) < 2^{1/8}$  で8バンドといった分岐の系列が予想される [26]。しかし、実際は 結合の効果で分岐の系列は途中で見られなくなり、少数のバンド状態だけが見られる。図 2.1(c) の2バンドの例では、平均場の運動が2周期の構造の中に3周期の構造を持ち その3周期の構造の中にさらに複雑な構造があるように見える。

### 2.3.4 デシンクロナイズ状態・3 (バンドなし状態)

$a(1-\epsilon) > \sqrt{2}$  では バンドは見られず、分布関数は 式 (2.9) のインバリアント・メジャーに近い形を保っている。この状態は結合ロジスティック写像の類推から乱流相と呼ばれている。しかし、一般の乱流との関係が乏しいので ここではそう呼ばないで、バンドがないことを強調する意味で「バンドなし状態」と呼ぶことにしよう。

この状態で 個々のエレメントは それぞれカオス的な運動をしている。大域結合ロジスティック写像の時と同様に平均場の揺らぎ (2.5) のシステムサイズ依存性を数値計算ことができる [18]。大域結合ロジスティック

写像とは状況が異なり、数値計算できる範囲で 平均場の揺らぎは  $1/\sqrt{N}$  に従い減っていくように見える。この結果から システムサイズ無限大 ( $N \rightarrow \infty$ ) で平均場の揺らぎが 0 であると考えられるが、これは必ずしも正しくない。直接的な数値計算をずっと大きなシステムサイズの系に対して行なうことは困難であり時間的な制約がある。システムサイズ無限大 の極限での解析を次の章で扱おう。

# Chapter 3

## 分布関数を用いた解析

Nonlinear Frobenius-Perron Equation を用い、分布関数の時間変化を追う。分布関数を有限個の階段関数で展開することで近似的に扱う。分布関数の固定点の線形安定性解析を行なう。

### 3.1 Nonlinear Frobenius-Perron Equation

エレメントの個数  $N$  が大きい場合の解析には、式 (2.1) のダイナミクスをそのまま使うより  $N \rightarrow \infty$  の極限でのダイナミクスを考察することが計算の都合上有利である。また、この極限は 統計力学の熱力学極限に対応しており、ここでの理論的解析は大域結合系の理解に重要である。

系の状態が分布関数  $\rho_n(x)$  で表現されることは、既に前章で述べた。分布関数  $\rho_n(x)$  は、

$$\rho_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_n(i)) \quad (3.1)$$

で定義される。ここで  $\delta(x)$  は、ディラックのデルタ関数である。分布関数は時間変化するのだが、このダイナミクスはフロベニウス・ペロン作用素を用いて書くことができる [19, 26]。

$$\rho_{n+1}(x) = \int \delta(x - F_n(y)) \rho_n(y) dy \quad (3.2)$$

ここで、その時間  $n$  での見かけ上の写像  $F_n(x)$  を導入した。この写像は、平均場  $h_n$  を通して時間に依存しており

$$F_n(x) = (1 - \epsilon)(1 - a|x|) + \epsilon h_n \quad (3.3)$$

という形をしている。一方、平均場  $h_n$  は、式 (3.1) より積分を用いて

$$h_n = \int f(x) \rho_n(x) dx \quad (3.4)$$

と書き表せる。

式 (3.2) は、非線形フロベニウス・ペロン方程式 (nonlinear Frobenius-Perron equation) としばしば呼ばれる。定義式 (3.1) によれば分布関数はデルタ関数の和の形であるが、 $N \rightarrow \infty$  の極限では分布関数を十分滑らかな関数<sup>1</sup>で与えてもよいと考えられる。非線形フロベニウス・ペロン方程式は、非線形フォッカー・プランク方程式を時間不連続に拡張したものであるといえる。初期条件は一様分布

$$\rho_0(x) = \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

で与えられることにする。これは、元のモデルのエレメント  $x_0(i)$  が区間  $[-1, 1]$  に完全にランダムに分布していることに対応している。

テントマップの左右2つの部分の線形性によりフロベニウス・ペロン作用素 (3.2) は、次のように簡略化される。

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{\rho_n(y_+) + \rho_n(y_-)}{a(1 - \epsilon)} \quad (3.6)$$

ここで  $y_+$  and  $y_-$  は、 $x$  の  $F_n$  の逆像である。すなわち、 $x = F_n(y_{\pm})$  が成り立つ。

## 3.2 有限次元近似

前節で分布関数のダイナミクスを表現した式 (3.6) を与えたが、この式は無限次元の力学系である。解析を行なうために式 (3.6) を有限次元の力学系に近似する。この近似には、次のような2通りの方法が考えられる。

### 1. 区間を細分化する方法：

区間  $[-1, 1]$  を  $m$  個の小さい区間  $[I_0, I_1, I_2, \dots, I_m]$  に分ける。これらの区間は同じ長さを持つものをとることが多いが必ずしもそうする必要はない。時間  $n$  に区間  $I_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ) の値を持つエレメントの割合を  $\rho_n^j$  とおく。こうおくことにより分布関数  $\rho_n(x)$  は、

<sup>1</sup>たかだか可算個の点を除けば連続ということ

$m+1$  個の実数で近似的に表現することができる。分布関数の時間変化を記述するために  $\rho_{n+1}^j$  を  $\rho_n^j$  で書いてやらねばいけない。金子 [19] の方法を使えば、区間  $I_j$  の中点の  $F_n$  に対する逆像を含んでいる区間を  $I_{+(j)}$   $I_{-(j)}$  と書き表すと

$$\rho_{n+1}^j = \frac{\rho_n^{+(j)} + \rho_n^{-(j)}}{a(1-\epsilon)} \quad (3.7)$$

となる。(3.7) とは別の近似の式を使うこともできる。いずれにせよ、 $m+1$  個の区間を分けることによりフロベニウス・ペロン作用素は  $(m+1) \times (m+1)$  の行列で近似することができる。大域結合系では、この行列が  $\rho_n^i$  に依存しており、そこに非線形性があることに注意しないとイケない。区間の幅のオーダーは  $1/m$  であり、この幅で分布関数が一定であるという近似であるから、

$$(\text{近似による誤差}) \sim \frac{1}{m} \quad (3.8)$$

と見積もることができる。

## 2. 分布関数を適当な関数系で展開する方法：

大域結合テントマップ系の分布関数は、テントマップの区分線形性により階段状の形をしている。この理由から分布関数を区分一様関数と近似し、階段関数の和として展開する。

$$\rho_n(x) = \sum_{j=0}^m b_n^j \theta(c_n^j - x) \quad (3.9)$$

ここ  $\theta(x)$  は階段関数である。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

分布関数  $\rho_n(x)$  が  $x = c_n^j$  で高さ  $b_n^j$  の段を持つことを表している。この表現は 隣合う 2 つ段の間の  $x$  で  $\rho_n(x)$  が同じ値を持つことを意味しており、区間  $[-1, 1]$  を  $c_n^j$  によって決まる区間に細分化しているといえる。1 の方法との違いは、区間の分け方が時間によって変化していくことである。この方法で分布関数は、 $2(m+1)$  個の実数で近似展開される。



1の方法で良い近似を与えるためには、 $m$  をかなり大きくとらないといけない。ここでは2の方法を用いて解析を行なう。初期条件は、(3.5)を考慮すると

$$\begin{aligned}
 b_1^0 &= \frac{1}{a(1-\epsilon)} \\
 c_1^0 &= 1 - \frac{a\epsilon}{2} \\
 b_1^1 &= -\frac{1}{a(1-\epsilon)} \\
 c_1^1 &= 1 - \frac{a\epsilon}{2} - a(1-\epsilon) \\
 \text{others} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

というように与えられる。 $n=1$  で分布関数の段は2個しかない。時間とともにテントマップの山の折れ曲がった部分によって新しい段ができるので、時間が $n$ になる時、段の個数は $n+1$ になる。段の数を $m$ 個に限ってやることにより、 $m$ だけ昔の時間にできた段を無視することになる。この近似の有効性の根拠は後で述べることにして、まず $b_n^j, c_n^j$ の時間変化の式を与える。

$$\begin{aligned}
 b_{n+1}^0 &= \frac{2}{a(1-\epsilon)} \sum_{j'=0}^m b_n^{j'} \theta(c_n^{j'}) \\
 c_{n+1}^0 &= F_n(0) \\
 b_{n+1}^{j+1} &= -\frac{1}{a(1-\epsilon)} b_n^j (2\theta(c_n^j) - 1) \\
 c_{n+1}^{j+1} &= F_n(c_n^j)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

この一連の式が式(3.6)の近似式になっている。 $F_n(x)$ は式(3.3)から分かるように平均場 $h_n$ に依存している。平均場は式(3.4)から

$$h_n = 1 - \frac{a}{2} \sum_{j=0}^m b_n^j c_n^j |c_n^j| \tag{3.12}$$

と書き表せるので、式(3.11)と式(3.12)により分布関数の段( $b_n^j, c_n^j$ )のダイナミクスは決められる。図3.1に図示したように、非線形フロベニウス・ペロン方程式 $2(m+1)$ 次元の力学系によって近似したことになる。

$m \rightarrow \infty$ の極限でこの表現は厳密に正しいが、 $m$ が有限で近似することは、どのくらいの精度で正しいといえるのだろうか。分布関数の段は、新しく加わったものほど高い傾向がある。式(3.11)の第3式より、段



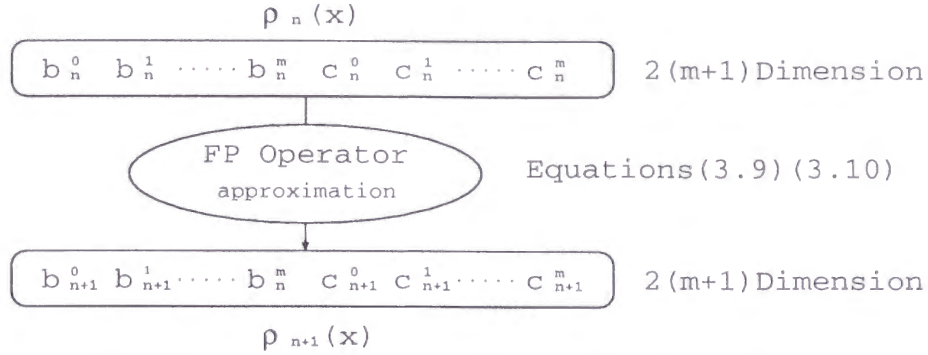


Figure 3.1: フロベニウス・ペロン作用素の有限近似

の高さは

$$|b_n^j| = \frac{1}{a^j(1-\epsilon)^j} |b_{n-j}^0|. \quad (3.13)$$

という式に従う。デシンクロナイズ状態 ( $a(1-\epsilon) > 1$ ) であれば  $b_n^j$  は、 $j \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。 $j > m$  の段を無視するので  $b_n^0 \sim 1$  として概算すると、おおよそ

$$(\text{近似による誤差}) \sim \frac{1}{a^m(1-\epsilon)^m} \quad (3.14)$$

の誤差が生じることが分かる。この誤差は  $m$  の指数関数的に減り、(1)の方法の誤差のオーダー (3.8) と比べると随分小さいことが分かる。一方、 $a(1-\epsilon) < 1$  の時はシンクロナイズ状態で分布関数がデルタ関数になっているから、この場合の近似が破綻していることはいうまでもない。

規格化条件  $\int \rho_n(x) dx = 1$  より

$$\sum_{j=0}^m b_n^j c_n^j \sim 1 \quad (3.15)$$

が近似の精度の範囲で成り立っている。また、

$$\sum_{j=0}^m b_n^j = 0 \quad (3.16)$$

も成り立っていることが分かるが、これは  $\rho_n(0) = 0$  が成り立つためである。

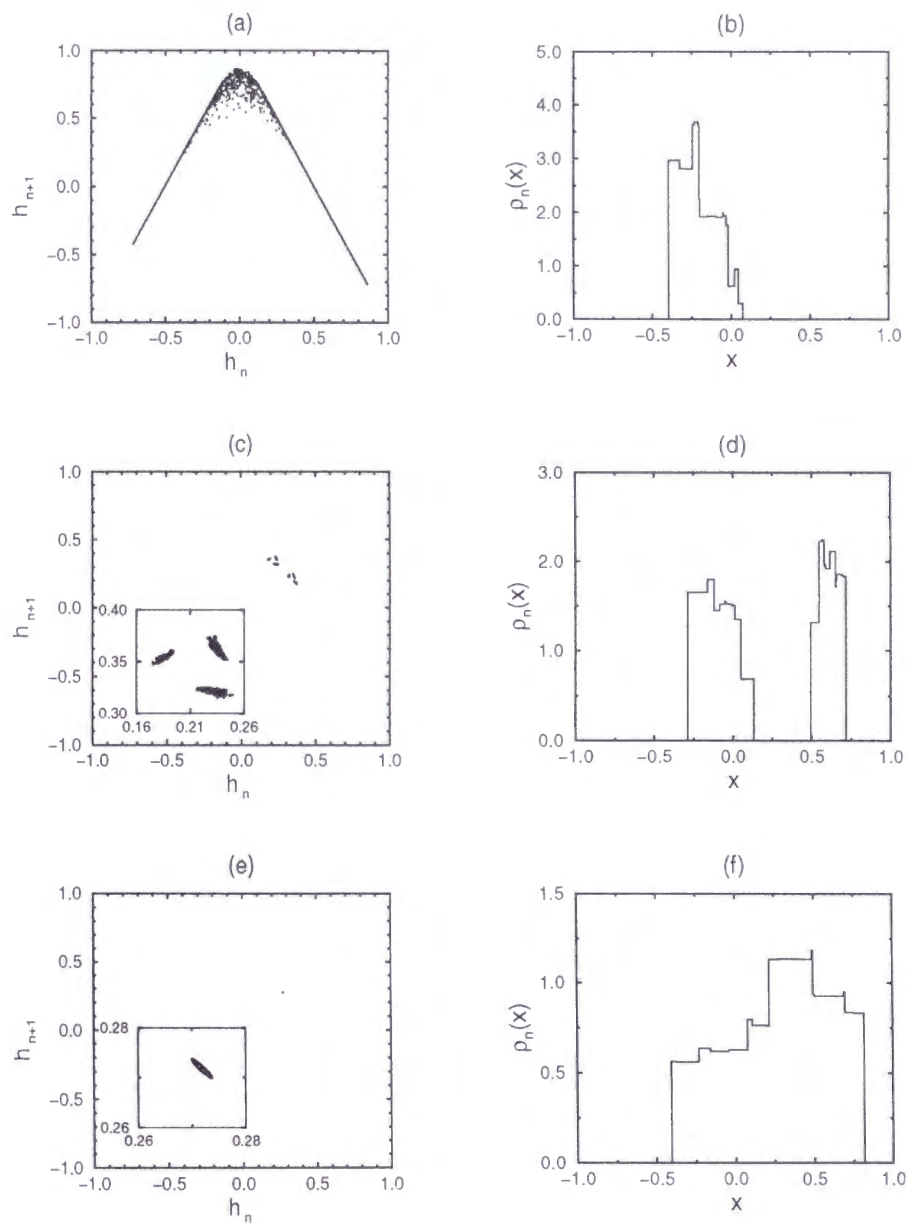


Figure 3.2: (a),(c),(e) は、平均場のリターンマップで挿入図はそれを拡大したものである。また、(b),(d),(f) は 分布関数 のスナップショットである。パラメーターは、図 2.1 と同じにとってある。いずれの場合も  $m = 300$  で計算した。

この方法で実際に数値計算したものを図 3.2 に示した。パラメーターは図 2.1 と同じものを用いている。図 3.2 と図 2.1 との平均場のリターンマップは良く一致していることが分かる。また、分布関数の形を比較すると大きく異なっているが、これは分布関数がカオス的な時間変化を持つためである。図 2.1(e) は、図 3.2(e) と比べて大きな範囲にわたって平均場が運動している。この乱れは、有限サイズの効果による揺らぎと考えられる。図 3.2(e) では、平均場がおよそ概周期的な運動を呈していることが見てとれる。しかし、システムサイズが十分大きくない時にはこのような概周期的な集団運動は有限サイズの効果によって見ることができない。集団運動は、システムサイズを無限大にした状況で明白に定義できるようになるのである。

### 3.3 安定性解析

式 (3.11) と式 (3.12) により作られる力学系には定常解が存在する。この定常解は、非線形フロベニウス・ペロン方程式によって決まる分布関数の定常状態に対応するものであって、元々の力学系 (2.1) の定常状態とは無関係である。分布関数が定常であってもその中のエレメント自体は運動していることに注意しないといけない。非線形フロベニウス・ペロン方程式の定常解は

$$\rho_{n+1}(x) = \rho_n(x) \equiv \rho_*(x) \quad (3.17)$$

ということだから、式 (3.11) を考慮して

$$\begin{aligned} b_*^0 &= \frac{2}{a(1-\epsilon)} \sum_{j'=0} b_*^{j'} \theta(c_*^{j'}) \\ c_*^0 &= F_*(0) \\ b_*^{j+1} &= -\frac{1}{a(1-\epsilon)} b_*^j (2\theta(c_*^j) - 1) \\ c_*^{j+1} &= F_*(c_*^j) \end{aligned} \quad (3.18)$$

をみたす  $b_*^j, c_*^j$  により

$$\rho_*(x) = \sum_{j=0}^m b_*^j \theta(c_*^j - x) \quad (3.19)$$

と表される。ここで  $F_*$  は、分布が  $\rho_*(x)$  の時の見かけの写像であり、

$$F_*(x) = (1 - \epsilon)(1 - a|x|) + \epsilon h_* \quad (3.20)$$

$$h_* = 1 - \frac{a}{2} \sum_{j=0}^m b_*^j c_*^j |c_*^j| \quad (3.21)$$

と定義される。式 (3.18), (3.20), (3.21) により定常解は、次のように自己完結的に決められる。式 (3.20) 中の  $h_*$  を入力と見なして  $h_{in}$  とし、式 (3.21) の左辺の  $h_*$  を出力と見なして  $h_{out}$  として区別しておく。式 (3.18) と規格化条件 (3.15) を使うと  $b_*^j$  と  $c_*^j$  は、簡単に求めることができ、 $h_{out}$  は式 (3.21) により決まる。従って  $h_{out}$  は  $h_{in}$  の関数とみなす。こうしてできた写像  $h_{out}(h_{in}; a, \epsilon)$  は、static mapping と呼ばれている [20]。この写像の固定点によって非線形フロベニウス・ペロン方程式の定常解が決まる。テントマップ系の場合 static mapping はなめらかであり数値計算で固定点を見出すことができる<sup>2</sup>。

ここから定常解の安定性について数値計算を行なう。まず、式 (3.11) を定常解  $(b_*^j, c_*^j)$  のまわりで線形化する。定常解からの差を

$$\begin{aligned} \beta_*^j &= b_n^j - b_*^j \\ \gamma_*^j &= c_n^j - c_*^j \end{aligned} \quad (3.22)$$

とする。この  $2(m+1)$  次元ベクトル  $(\beta_n^0, \beta_n^1 \dots \beta_n^M, \gamma_n^0, \gamma_n^1 \dots \gamma_n^M)$  の時間変化は、 $F_n(x)$  が  $b_n^j$  and  $c_n^j$  に依存していることに注意して考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}^0 &= \frac{2}{a(1-\epsilon)} \sum_{j'=0}^m \beta_n^{j'} \theta(c_*^{j'}) \\ \gamma_{n+1}^0 &= -\frac{a\epsilon}{2} \sum_{j'=0}^m (\beta_n^{j'} c_*^{j'} |c_*^{j'}| + 2\gamma_n^{j'} b_*^{j'} |c_*^{j'}|) \\ \beta_{n+1}^{j+1} &= -\frac{1}{a(1-\epsilon)} \beta_n^j (2\theta(c_*^j) - 1) \\ \gamma_{n+1}^{j+1} &= -\frac{a\epsilon}{2} \sum_{j'=0}^m (\beta_n^{j'} c_*^{j'} |c_*^{j'}| + 2\gamma_n^{j'} b_*^{j'} |c_*^{j'}|) \\ &\quad - a(1-\epsilon) \gamma_n^j (2\theta(c_*^j) - 1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

<sup>2</sup> ロジスティックマップ系では window の効果により static mapping がなめらかではない [18, 20]

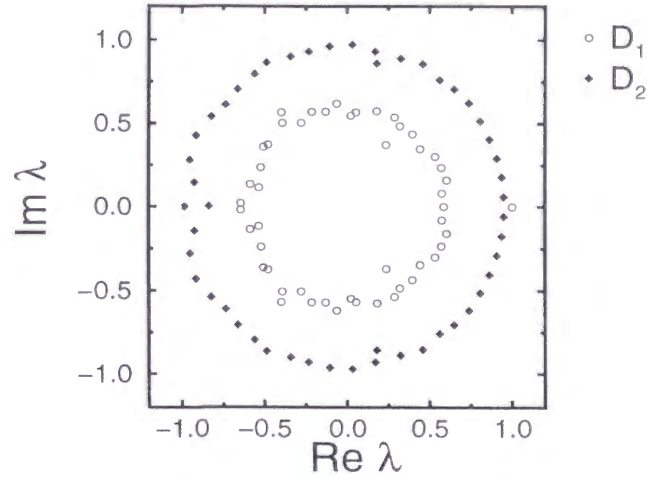


Figure 3.3:  $a = 1.5, \epsilon = 0.05$  に対する  $50 \times 50$   $D_1, D_2$  の固有値。

上の式は、

$$\begin{pmatrix} \vec{\beta}_{n+1} \\ \vec{\gamma}_{n+1} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \vec{\beta}_n \\ \vec{\gamma}_n \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

となる  $2(m+1) \times 2(m+1)$  行列で表現できる。

行列  $D$  の固有値により 定常解の安定性を知ることができる。行列  $D$  は

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ * & D_2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

ような形をしているので、その固有値は 2つの行列  $D_1, D_2$  の固有値によって与えられる。例として 図 3.3 に  $a = 1.5, \epsilon = 0.05$  の場合の固有値を図示した。ここで  $D_1, D_2$  は  $50 \times 50$  行列としている。式 (3.14) の概算によれば おおよそ  $10^{-8}$  の誤差を無視した近似ということになる。

固有値は 実数と共役複素数からなり、図 3.3 に示されるようほぼ2つの円周上見い出される。内側の円は  $D_1$  の固有値に対応し、外側の円は  $D_2$  から得られる。 $\rho_n(x)$  の規格化条件により固有値の中に必ず 1 になるものがある [26]。残りの  $2m+1$  個の固有値がすべて単位円内にあれば定常解が安定であるといえる。不安定化には、次に述べるような 2通りの

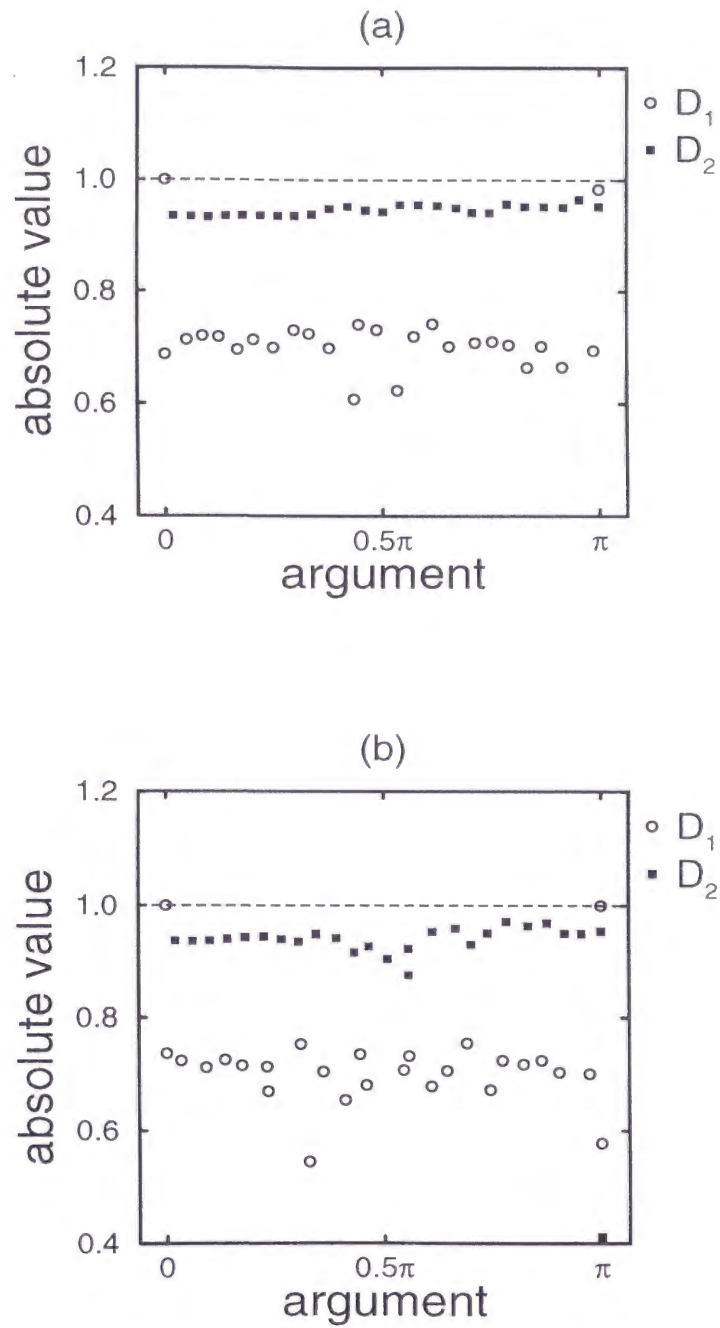


Figure 3.4:  $D_1$  と  $D_2$  の固有値。その偏角を横軸、絶対値を立軸にした。固有値は共役複素数からなるので偏角は 0 から  $\pi$  までを示した。(a)  $a = 1.5$ ,  $\epsilon = 0.05$  (b)  $a = 1.5$ ,  $\epsilon = 0.06$  いずれは、 $m + 1 = 50$  で計算した

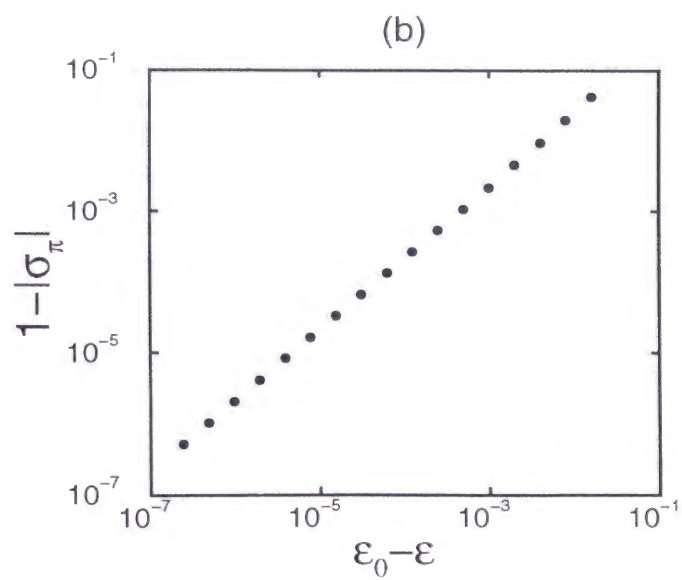
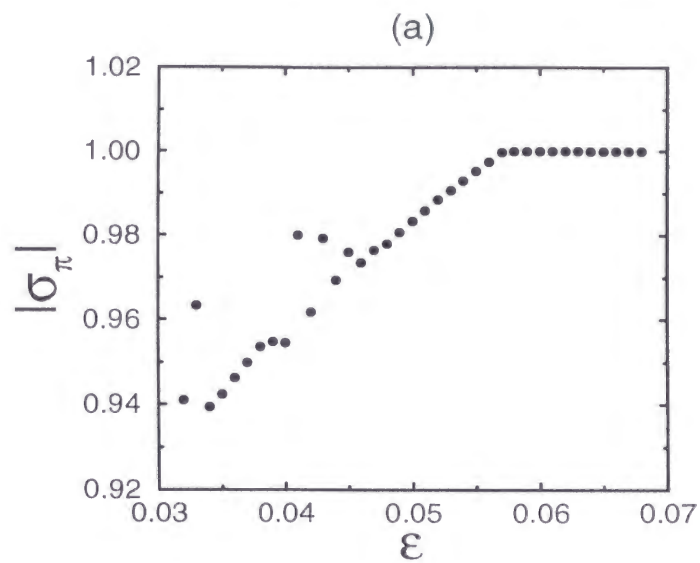


Figure 3.5: (a)  $a = 1.99$  で偏角が  $\pi$  の個有値の絶対値  $|\sigma_\pi|$  を  $\epsilon$  の関数として書いた。(b) は、バンドができるパラメータ  $\epsilon_0$  の近くで log-log plot した。



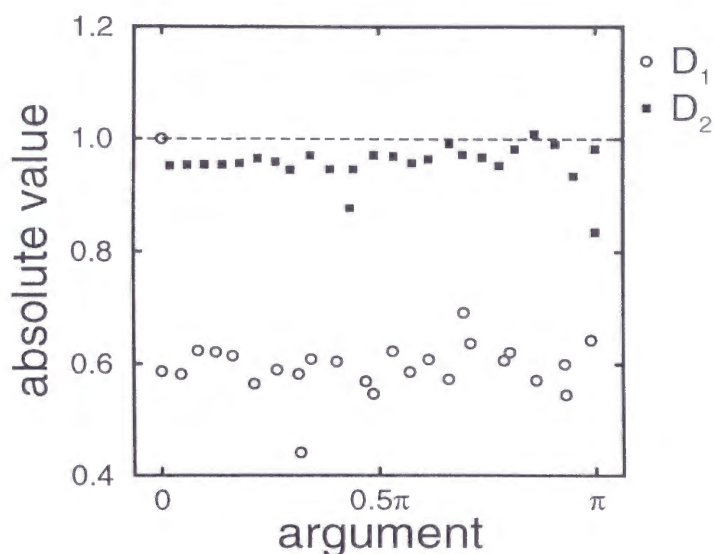


Figure 3.6:  $D_1$  と  $D_2$  の固有値。その偏角を横軸、絶対値を立軸にした。固有値は共役複素数からなるので偏角は 0 から  $\pi$  までを示した。 $a = 1.9$ ,  $\epsilon = 0.12$  であり、 $m + 1 = 50$  で計算した。

過程がある。

まず、 $a = 1.5$  に固定して  $\epsilon$  を変化させた場合を考えてみる。図 3.4(a) をみると  $a = 1.5$ ,  $\epsilon = 0.05$  で固有値の絶対値は、必ず存在する 1 になっているもの 1 つを除けばすべて 1 以下である。一方、図 3.4(b) の  $a = 1.5$ ,  $\epsilon = 0.06$  の場合には、絶対値がちょうど 1 になる固有値が 2 つ存在している。この時の偏角は 0 と  $\pi$  になっている。この不安定性は分布関数のバンド分割によるものである。バンド分割は、 $a(1 - \epsilon) = \sqrt{2}$  で生じるが、図 3.4(a) のパラメーターでは  $a(1 - \epsilon) > \sqrt{2}$  であり、図 3.4(b) のパラメーターでは  $a(1 - \epsilon) < \sqrt{2}$  である。この不安定化により、図 3.2(d) のような 2 バンドの分布関数を持つようになり、2 周期の運動が現れる。このような 2 周期運動は無数に存在し、初期条件によってどの軌道をとるかが決まる。そのため、安定性が中立になっているのである。

図 3.5 は、偏角が  $\pi$  の固有値  $\sigma_\pi$  を計算したものである。 $a = 1.5$  の

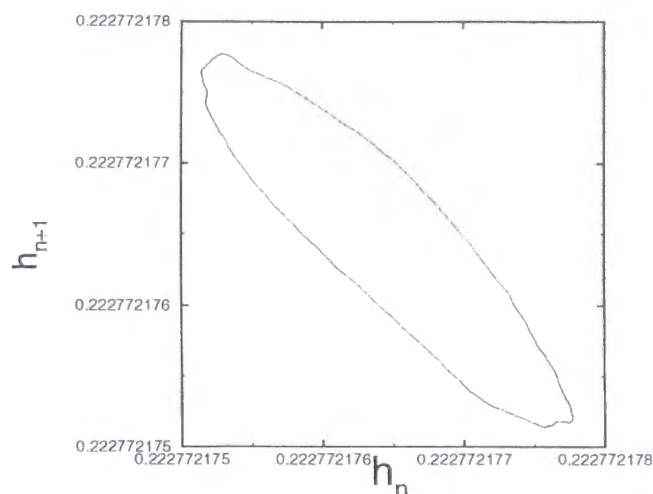


Figure 3.7:  $a = 1.9$ ,  $\epsilon = 0.12$  での平均場  $h_n$  のリターンマップ。

時のバンド分割は  $\epsilon = \epsilon_0 = 0.05719\dots$  で生じることが分かっている。図 3.5(a) から  $|\sigma_\pi|$  は、 $\epsilon < \epsilon_0$  で  $\epsilon$  の増加に伴い、1 に近付いていくこと分かる。また  $\epsilon > \epsilon_0$  では、 $|\sigma_\pi|$  が 1 に留まっている。この不安定性をよく見るために  $\epsilon_0$  の近くで図 3.5(b) に log-log plot した。 $|\sigma_\pi|$  は、 $\epsilon_0 - \epsilon$  に対して線形に 1 に近付いていることが分かる。このように、この解析でバンド分割するパラメーターを正確に求められる。

もうひとつの不安定化過程は、 $a(1 - \epsilon) < \sqrt{2}$  の領域で起きる。図 3.6 はこの不安定領域での固有値を図示したものである。この時、 $\sigma_\pi$  は 1 より小さいが、1 より大きい固有値が存在している。不安定化した固有値の偏角は、おおよそ  $0.86\pi$  である。この結果は、このパラメーターでは振動数でいうと 0.43 ぐらいのモードが不安定化することを予想させる。このパラメーターでは、実際、概周期的な集団運動が見られている (図 3.7)。概周期運動の周期は、平均場の時系列のパワースペクトルを見ることで分かる。パワースペクトルは図 3.8 に示したが、振動数 0.43 で鋭いピークを持っている。この値は、固定点の安定性解析から求めた不安定化する振動数とよく一致している。

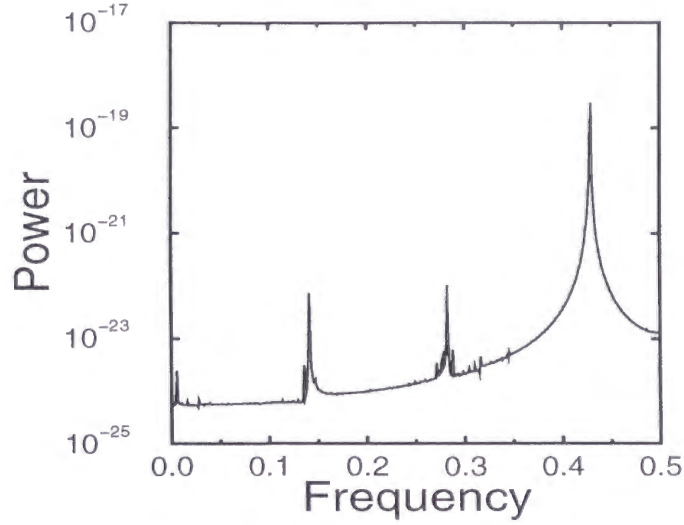


Figure 3.8:  $a = 1.9$ ,  $\epsilon = 0.12$  での平均場の時系列のパワースペクトル

### 3.4 考察

本章では、大域結合テント写像系をシステムサイズ無限大の熱力学的極限で解析した。この極限で系のダイナミクスは、分布関数の時間変化によって表される。分布関数を厳密に記述するためには無限個の変数が必要であるが、有限個の変数を用いて近似的に展開した。そして分布関数の定常解を求め、そのまわりで線形安定性解析を行なった。この近似による誤差は式 (3.14) で与えられるので

$$(\text{安定性解析の精度}) \sim \frac{1}{a^m(1-\epsilon)^m} \quad (3.26)$$

となる。従って、定常解からずれて起こる集団運動の大きさが  $1/a^m(1-\epsilon)^m$  のオーダーより小さい時には、この安定性解析は正しい結果を導かない。実際、大域結合テント写像系は結合がどんなに小さくても定常解が不安定であり、小さい振幅の集団運動を持っていることがわかっている [28]。

一方、集団運動が  $1/a^m(1-\epsilon)^m$  のオーダーより大きいならば、この

安定性解析は 良い結果を与える。偏角が  $2\pi$  である固有値の絶対値よりバンド分割があるパラメーターを正しく知ることができる。また、概周期的な集団運動が見られるような場合には、安定性解析で不安定になる振動数から集団運動の振動数を類推することができる。

近似の精度を上げていくことで結合が小さい領域の小さい集団運動を調べることもできると考えられるが、本論文では むしろ大きい振幅を持つ集団運動を取り扱っていく。大きい集団運動は、システムサイズが小さい系にもその兆候が現れる。

## Chapter 4

# Lyapunov Analysis

リアプノフ数は系が持つカオスの特徴を調べるのに有効な指数である[4]。リアプノフ数とローカルな軌道発散率の差の変化を調べた。この差が結合強度とシステムサイズを変えていく時 スケーリング則に従っている。近似を用いてこのスケーリング則の説明を試みる。スケーリング則から大きくずれる場合があり、このシンギュラリティがカオス的な集団運動によるものであることを示す。

### 4.1 準備

前章では システムサイズ無限大の極限  $N \rightarrow \infty$  での分布関数を用いた解析を行なったが、ここでは 元の有限個のエレメントによる系(2.1)に戻って考察を行なう。系の ある瞬間での状態は、 $N$  次元相空間内の 1 点で表される。離散時間のモデルを使用しているので、この状態の変化は、相空間内の点の列によって示される。2 つ状態の近さは、その状態を表す 2 点の距離によって定義できるであろう。無限小の距離の 2 点の距離  $l(n)$  が時間  $n$  に関して、どのように変化するかによって 次のように最大リアプノフ数が決まる。

$$\lambda_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{l(0) \rightarrow 0} \frac{\log l(n)}{n} \quad (4.1)$$

最大リアプノフ数  $\lambda_0$  が正の場合には、ある時間にほとんど同じ状態にあったとしても時間が経つにつれ 離れていく。状態間の距離は 指数関数  $\exp(\lambda_0 n)$  に従い増大する。この性質は カオスの特徴の 1 つである。

$\exp(\lambda_0 n)$  に従った軌道拡大性は 1 方向に沿って起こるので、その方向を除いた空間での軌道拡大性から別の指数が求められる [51]。これは 第 2

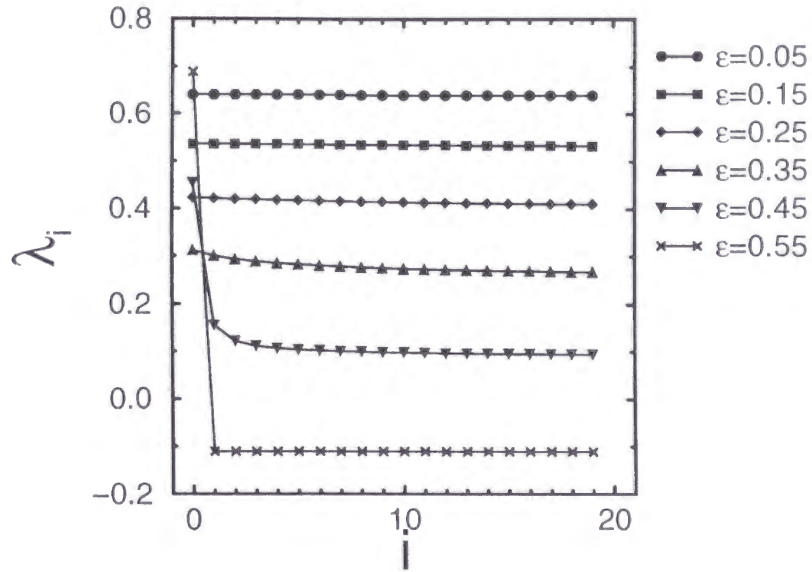


Figure 4.1:  $a = 1.99$  で  $\epsilon = 0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55$  でのリアプノフスペクトル  $\lambda_i$  を  $N = 20$  に対して図示した。はじめの  $10^7$  時間ステップ除き  $10^5$  時間ステップの間で求めた。

リアプノフ数と呼ばれ、同様に  $N$  個のリアプノフ数  $\lambda_i (i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$  を定義することができる。 $N$  個のリアプノフ数の列は、リアプノフスペクトルと呼ばれる。また、正になるリアプノフ数の個数からリアプノフ次元を定義することができる。

リアプノフスペクトルの形態による大自由度力学系の研究は頻繁に行なわれ、集団運動との関係が示唆されている [59]。結合カオス系での相転移現象とリアプノフ次元の変化の関係も指摘されている [61]。

## 4.2 リアプノフ数の変化

リアプノフスペクトルの例を図 4.1 に図示した。シンクロナイズ状態 ( $a(1 - \epsilon) < 1$ ) の時は系が 1 次元に縮退しているので、最大リアプノフ



数だけが正であとの  $N-1$  個のリアプノフ数は負になっている。最大リアプノフ数の値は、1次元のカオスのリアプノフ数に一致しているから、ちょうど  $\log a$  になる。図 4.1 では  $\epsilon = 0.55$  の場合がそうになっている。一方、デシンクロナイズ状態 ( $a(1-\epsilon) > 1$ ) の時には  $N$  個のリアプノフ数すべてが正になっている。

このようにリアプノフ次元は、シンクロナイズ状態が不安定化する点 ( $a(1-\epsilon) = 1$ ) で 1 から  $N$  に突然 変わることに注意せねばいけない。デシンクロナイズ状態で (概) 周期的な集団運動を持つようなことがあれば、 $N$  を大きくしていく時 正になるリアプノフ数の個数が  $N-1$  になる、あるいは、0 になるリアプノフ数が存在するという予想されるかも知れない。そして集団運動の分岐によってリアプノフ次元がだんだんと変化していくと考えるかも知れない。しかし、この予想は正しくない。このような予想は、(概) 周期的な集団運動による制約のため系が持ちうる状態の範囲が  $N$  次元の空間から それより小さい次元の空間になってしまうという考えからくるようである。例えば、 $g$  という 各  $x_n$  対称な関数と周期的な変化をする変数  $G(n)$  が

$$g(x_n(1), x_n(2), x_n(3), \dots, x_n(N)) \rightarrow G(n) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (4.2)$$

をみたしているとする系を  $N-1$  個のカオス的なエレメントと  $G(n)$  で表せるので  $N-1$  次元に 制約されるという主張である。しかし、このような集団運動による束縛は  $N \rightarrow \infty$  で厳密に定義されるものなので  $N$  が有限であれば状態空間に 次元が小さくなるような制約を与えない。仮に、結合がない  $N$  個 のカオスマップを考えると大数の法則により 任意の  $g$  に対して  $G(n) = \text{constant}$  が存在する。この束縛が極限としてでなく厳密に成り立つと考えるなら状態空間の次元が小さくなるはずであるが、この場合 系は 独立な  $N$  個の運動を持つので  $N$  次元である。 $G(n)$  が周期的であっても同様に考えることができるので、このような束縛は リアプノフ数に何の影響も与えないことが分かる。

従って デシンクロナイズ状態では、リアプノフ次元がエレメントの個数と一致する。これは、運動の自由度が システムサイズに比例して大きくなることを意味している。

さて、ここでは最大リアプノフ数について見てみる。 $a$  を固定して 結合の大きさ  $\epsilon$  を変化させる場合の最大リアプノフ数の変化を図 4.2 に 図示した。いずれの  $a$  に対しても 最大リアプノフ数は  $\epsilon$  の増加に伴いはじめは減少し 後に増加している。このような谷型の変化がどのようなメカニズムで生じているかを次節以降 考察し、集団運動との関わりを調べる ことのする。



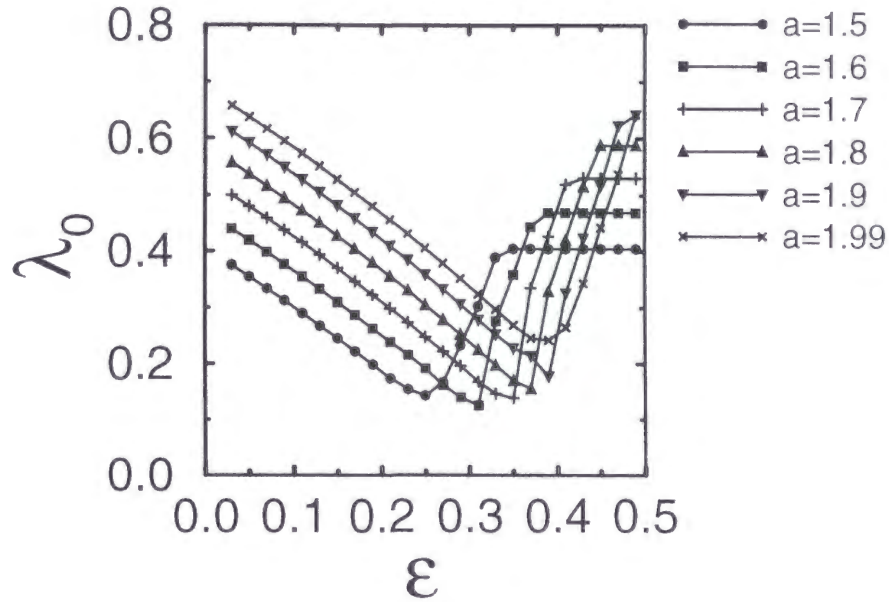


Figure 4.2:  $a = 1.5, 1.6, 1.7, 1.9, 1.99$  で  $\epsilon$  を変化させた時の  $\lambda_0$ 。を  $N = 100$  に対して、はじめの  $10^7$  時間ステップ除き  $10^5$  時間ステップの間で求めた。水平になっている部分は シンクロナイズ状態に対応している。

### 4.3 ローカルな軌道発散率との差

ここから、デシンクロナイズ状態 ( $a(1 - \epsilon) > 1$ ) にある時の系のリアプノフ数について詳しく調べていく。平均場  $h_n$  をエレメントの状態とは独立な外場であると考えてみる。そうすると モデル方程式 (2.2) の右辺の第 1 項のみがリアプノフ数に寄与することになる。この場合にすべてのリアプノフ数は縮退して  $\log(a(1 - \epsilon))$  になる。この値を ローカルな指数発散率  $\lambda_{local}$  と呼ぶことにしよう。リアプノフ数そのものより、リアプノフ数と ローカルな指数発散率との差

$$\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{local} \quad (4.3)$$

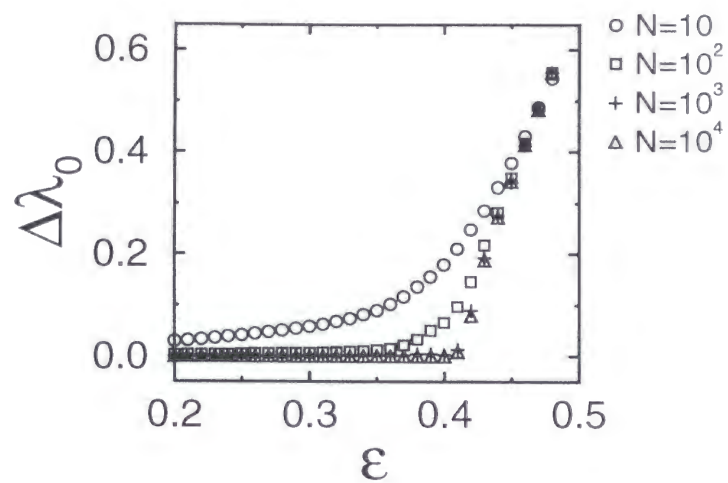


Figure 4.3:  $a=1.99$  で  $n$  を変化した時の  $\Delta\lambda_0$

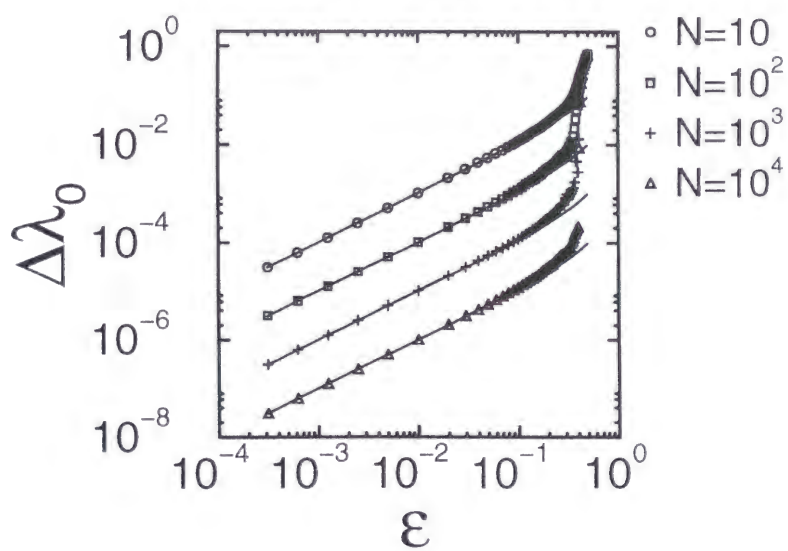


Figure 4.4: 図 4.2 を両対数グラフで表した。曲線はランダム近似を用いて計算した結果である。

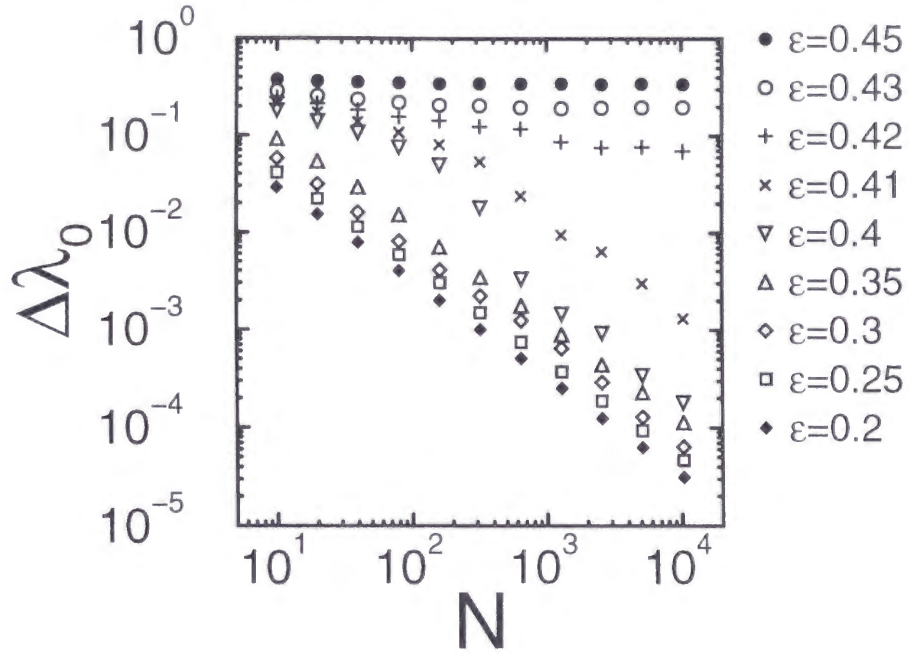


Figure 4.5:  $a=1.99$  で  $N$  を変化させた時の  $\Delta\lambda_0$

に集団運動の効果が現れると考えられる。なぜなら、集団運動がなければ  $\Delta\lambda_i = 0$  になるからである。

そのうち最大リアプノフ数に関するもの  $\Delta\lambda_0$  の結合の強さ  $\epsilon$  を変えた時の変化を図 4.3 に図示した。これ以後でテントマップの傾きを  $a = 1.99$  に固定するが、それ以外の  $a$  についてもリアプノフ数の変化に定性的な変化はない。 $a = 1.99$  の時、 $\epsilon < 0.497\dots$  でデシンクロナイズ状態になるが、図 4.3 より  $\epsilon = \epsilon_t \sim 0.41$  に明らかな転移が存在している

図 4.4 に図 4.3 と同じデータを両対数グラフを表示した。結合が小さい領域では、

$$\Delta\lambda_0 \propto \epsilon \quad (4.4)$$

のような関係が成り立っている。また、 $\Delta\lambda_0$  のシステムサイズに対する変化を図 4.5 に図示した。ここに見られるよう、 $\epsilon < \epsilon_t$  では、 $N$  が大きい

所で

$$\Delta\lambda_0 \propto 1/N \quad (4.5)$$

に従っている。一方、 $\epsilon > \epsilon_t$ では $\Delta\lambda_0$ は一定になっている。このように、結合の弱い領域 ( $\epsilon < \epsilon_t$ ) では上の2つのスケーリング則が成り立っていることが分かった。

## 4.4 ランダム近似

前節の数値計算によって求めたスケーリング則 (4.4)(4.5) を近似を使って導出する。 $s_n(i) \equiv \text{sgn}(x_n(i))$  とおくとヤコビ行列は マイナス符号を無視して書くと

$$A_n = A_n^1 + A_n^2 \quad (4.6)$$

$$A_n^1 = \begin{pmatrix} a(1-\epsilon)s_n(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a(1-\epsilon)s_n(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a(1-\epsilon)s_n(N) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$A_n^2 = \begin{pmatrix} a\epsilon s_n(1)/N & a\epsilon s_n(1)/N & \dots & a\epsilon s_n(1)/N \\ a\epsilon s_n(2)/N & a\epsilon s_n(2)/N & \dots & a\epsilon s_n(2)/N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\epsilon s_n(N)/N & a\epsilon s_n(N)/N & \dots & a\epsilon s_n(N)/N \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

となる。リアプノフ数はヤコビ行列の時系列の積によって定義される。 $s_n(i)$  がマルコフ的なランダムな変数であると仮定する。 $s_n(i)$  を確率変数と考えるが、2つのエレメント間の相関を考慮して

$$\begin{aligned} P(s_n(i)s_n(j) = 1) &= P_{ij} \\ P(s_n(i)s_n(j) = -1) &= 1 - P_{ij} \end{aligned} \quad (4.9)$$

と確率を与える。系がデシンクロナイズ状態にあることから

$$P_{ij} < 1 \quad (i \neq j) \quad (4.10)$$

とする。また、明らかに  $P_{ii} = 1$  である。これらの仮定は、エレメントがテントマップであることを考えるとともっともらしいと思われる。

リアプノフ数は、確率的に値が決まる  $s_n(i)$  によって計算できる。しかし、一般的にランダム行列から解析的にリアプノフ数を求めることはできない。そこで、さらに あらゆる  $n_c$  に対して

$$\sum_{i=1}^N \prod_{k=1}^n s_{k-1}(i) s_{k-1}(j) \sim 1 \quad (4.11)$$

であると仮定する。この仮定に基づき近似計算が可能になる。 $P_{ij} \neq 1/2$  の場合、 $n \sim 1$  では式 (4.11) は明らかに正しくないが、 $n$  を大きくしていくと正しい関係式になる。appendix で見るように  $\epsilon$  が小さい所では (4.11) からのずれがリアプノフ数にあまり効かない。appendix でなされる計算によれば、(4.11) を仮定した時ヤコビ行列の積の非対角項が無視することができ、リアプノフ数は

$$\begin{aligned} \lambda &= \log(a(1-\epsilon)) + \log\left(1 + \frac{\epsilon}{N(1-\epsilon)}\right) \\ &\sim \lambda_{local} + \frac{\epsilon}{N(1-\epsilon)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となり、スケーリング則 (4.4)・(4.5) が導かれる。式 (4.12) から求まるリアプノフ数を 図 4.4 に重ね書きした。 $\epsilon$  が小さい所ではよく一致しているが、 $\epsilon$  が大きくなるにつれ 実際の結果から少しずつずれていき、 $\epsilon_t$  付近で急激に離れていくことが分かる。このようなずれは 仮定 (4.11) からのずれの寄与によって引き起こされると考えられる。

## 4.5 リアプノフスペクトル

最大リアプノフ数以外のリアプノフ数はどのようなになっているかを見てみる。どのような場合も すべてのリアプノフ数は

$$\lambda_i > \lambda_{local} \quad (4.13)$$

となっている。すなわち、 $\Delta\lambda_i > 0$  である。

$\epsilon < \epsilon_t$  の領域で  $N\Delta\lambda_i$  を  $i/n$  の関数としてプロットしたものが図 4.6 である。 $N\Delta\lambda_i$  がシステムサイズに依らず一致している。このようにしてシステムサイズに依らないスペクトルを得ることができる。図 4.6 の点線は 前節の近似によって求めたリアプノフ数 (4.12) の値、すなわち  $\log(\epsilon/(1-\epsilon))$  を重ねて図示したものである。図 4.6 の (a) と (b) を比較すると 実際計算したリアプノフ数が  $\epsilon$  を大きくした時に 近似式 (4.12) か



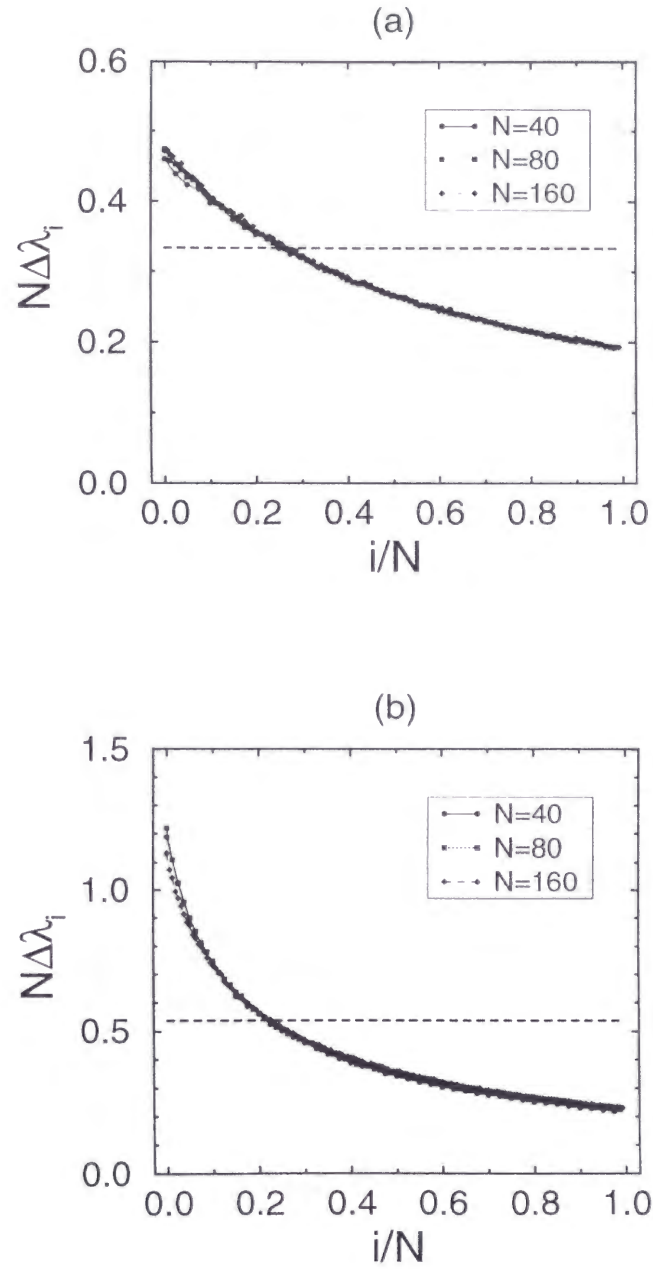


Figure 4.6:  $N\Delta\lambda_i$  を  $i/N$  の関数として  $N = 40, 80, 160$  において計算した。点線は、ランダム近似で求めたリアプノフ数である。(a)  $a = 1.99$ ,  $\epsilon = 0.25$  (b)  $a = 1.99$ ,  $\epsilon = 0.35$  である。

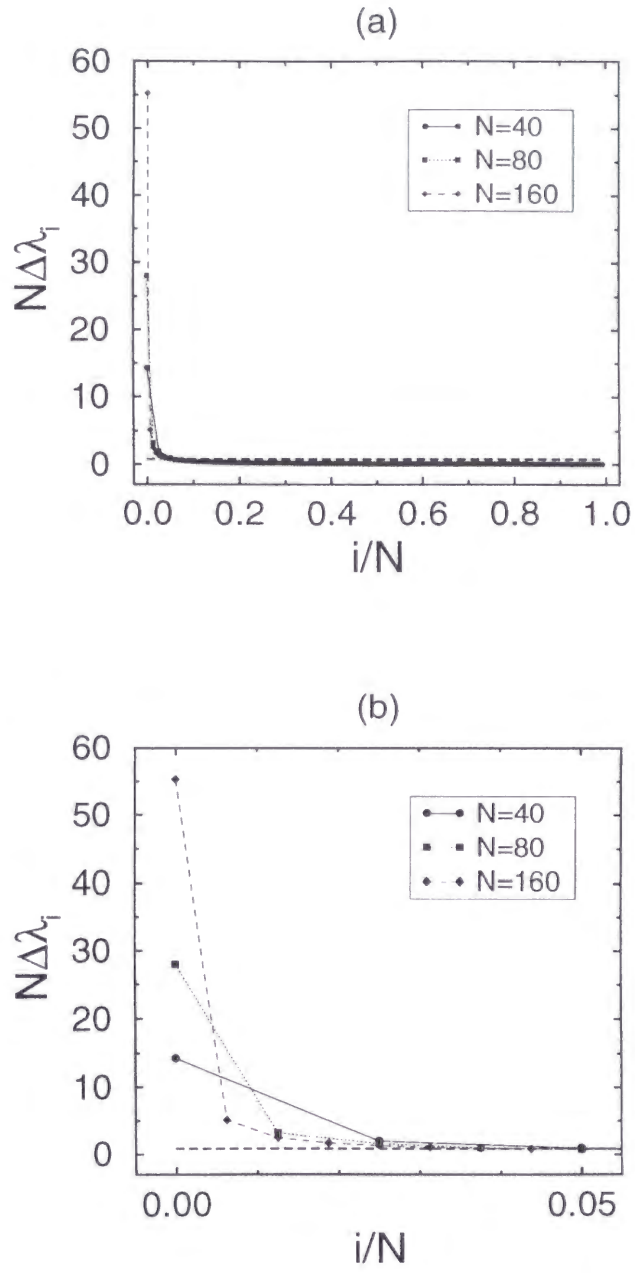


Figure 4.7:  $a = 1.99$ ,  $\epsilon = 0.45$  で  $N\Delta\lambda_i$  を  $i/N$  の関数として  $N = 40, 80, 160$  において計算した。点線は、ランダム近似で求めたリアプノフ数である。(b) は拡大図

らの離れていく様子が分かる。 $\epsilon$  が大きい方がスペクトルの傾斜が大きくなっている。

一方  $\epsilon > \epsilon_t$  では、図 4.5 で見たように システムサイズが大きくても、 $\Delta\lambda_0$  自体が システムサイズに依らず一定になっており、スケーリング則 (4.5) に従わない。このパラメーター領域で、図 4.6 と同じものをグラフにすると図 4.7 になる。図 4.7(b) は、図 4.7(a) の拡大図である。 $i/n = 0$  でシステムサイズによる違いが見られるが、 $i/n$  の大きい所ではシステムサイズに依らず、スペクトルは一致している。このスペクトルの多くの部分は近似値  $\log(\epsilon/(1-\epsilon))$  を下まわっている。

システムサイズによるスペクトルの違いは、系のカオス的な集団的な運動によるものと予想される。このパラメーターで平均場は、図 2.1(a) のように元の写像  $f(x)$  の 1 次元のカオスに近い振舞いをしており、このカオス性がリアプノフスペクトルのシンギュラリティに現れていると考えられる。

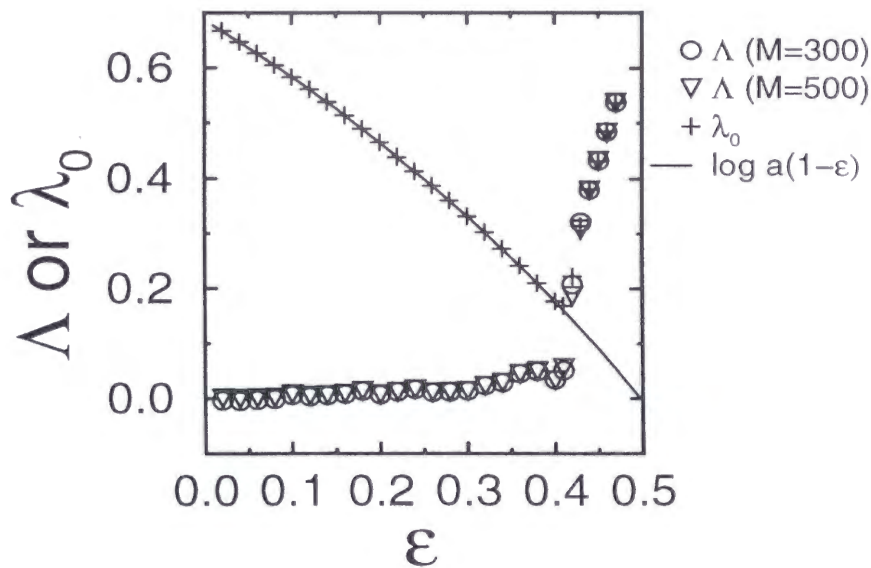


Figure 4.8:  $\Delta$ 、 $\lambda_0$ 、 $\Delta_{local}$  の比較。 $\Delta$  は  $m = 300$  と  $m = 500$  について計算したものであり  $\lambda_0$  は  $N = 10^4$  について計算したものを図示した。

## 4.6 分布関数の軌道拡大率

3章で  $N \rightarrow \infty$  での系のダイナミクスを分布関数の時間変化によって表し、それを近似展開した。近似展開によって無限次元の力学系を  $2(m+1)$  次元の力学系で表現した。 $2(m+1)$  次元の力学系において計算される最大リアプノフ数を式 (1) から計算されるリアプノフ数と混同を避けるため分布関数の軌道拡大率と呼び  $\Lambda$  と書くことにしよう。 $\Lambda$  は非線形フロベニウス・ペロン方程式の近い2つの解の間の距離の指数関数的な発散の指数であり、平均場の時系列の最大リアプノフ数と考えられる。

$2(m+1)$  個の変数  $(b_n^0, b_n^1 \dots b_n^m, c_n^0, c_n^1 \dots c_n^m)$  の時系列が系の軌道を与えている。この軌道からの摂動を  $(\beta_n^0, \beta_n^1 \dots \beta_n^m, \gamma_n^0, \gamma_n^1 \dots \gamma_n^m)$  として3章の安定性解析の時と同じように線形化すると、

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}^0 &= \frac{2}{a(1-\epsilon)} \sum_{j'=0}^m \beta_n^{j'} \theta(c_n^{j'}) \\ \gamma_{n+1}^0 &= -\frac{a\epsilon}{2} \sum_{j'=0}^m \left( \beta_n^{j'} c_n^{j'} |c_n^{j'}| + 2\gamma_n^{j'} b_n^{j'} |c_n^{j'}| \right) \\ \beta_{n+1}^{j+1} &= -\frac{1}{a(1-\epsilon)} \beta_n^j (2\theta(c_n^j) - 1) \\ \gamma_{n+1}^{j+1} &= -\frac{a\epsilon}{2} \sum_{j'=0}^m \left( \beta_n^{j'} c_n^{j'} |c_n^{j'}| + 2\gamma_n^{j'} b_n^{j'} |c_n^{j'}| \right) - a(1-\epsilon) \gamma_n^j (2\theta(c_n^j) - 1)\end{aligned}\tag{4.14}$$

となる。この式から出てくる行列を使い、分布関数の軌道拡大率が計算できる。この行列も式 (3.25) のような形をしている。普通のリアプノフ数ではシステムサイズを有限にして線形化して計算するため個々のエレメントの運動の寄与がある。一方、分布関数の軌道拡大率は、式 (4.1) の  $l \rightarrow 0$  の極限をとる前に  $N \rightarrow \infty$  の極限をとっているので個々のエレメントの運動は効かないと考えられる。分布関数の軌道拡大率は、 $N \rightarrow \infty$  での平均場  $h_n$  の時系列のリアプノフ数である。

図 4.8 に  $m = 300$  と  $m = 500$  との場合について  $\epsilon$  を変えた時の  $\Lambda$  を計算した。 $\epsilon$  が小さい領域では、 $m = 500$  で計算したものが  $m = 300$  のものと比べてやや小さくなっていることを除けばこの2つのデータはよく一致している。結合の小さい領域での不一致は、この領域での集団運動の規模が小さいため近似の精度の違い (3.14) が無視できないためである。図 4.8 には、普通に計算した最大リアプノフ数  $\lambda_0$  とローカルな軌道発散率  $\lambda_{local} = \log(a(1-\epsilon))$  とを比較のため重ね書きした。

結合の弱い領域  $\epsilon < \epsilon_t$  では前に見たように  $N$  を大きくすると最大リ

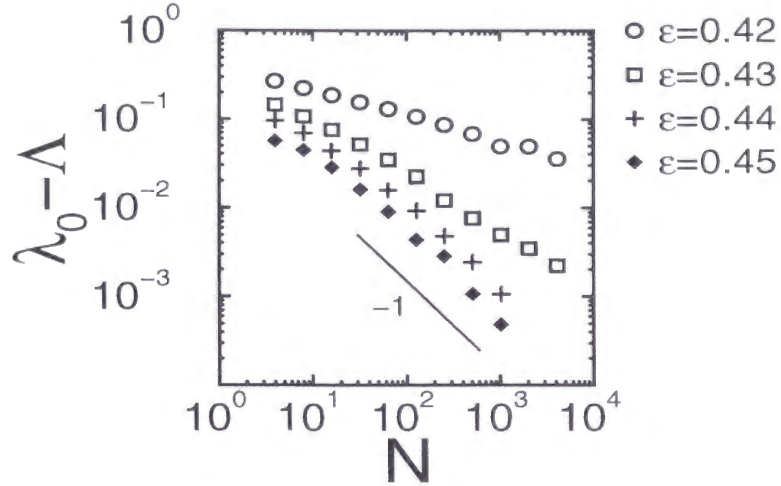


Figure 4.9:  $\lambda_0$  と  $\Lambda$  の比較。  $a = 1.99$  である。

アプノフ数  $\lambda_0$  は  $\lambda_{local}$  に近づく。式 (4.13) も考慮すると  $\Lambda > 0$  であっても  $\Lambda$  の値とリアプノフ数  $\lambda_i$  の値とは関係ない。  $\Lambda > 0$  の時には、系がカオス的な集団運動を持つ。従って、この結合の弱い領域では 集団運動がリアプノフ数に影響を与えない。

一方、結合の強い領域  $\epsilon > \epsilon_{strong} \sim 0.43$  では  $\lambda_0 \sim \Lambda$  であることが分かる。これが 図 4.7 のリアプノフスペクトルのシンギュラリティの原因である。図 4.9 から分かるように、システムサイズ  $N$  の増大に伴い  $\lambda_0$  が  $\Lambda$  に近付いていくように見える。  $\epsilon$  が 0.44 より大きくなると

$$\lambda_0 - \Lambda \sim N^{-\beta} \quad (4.15)$$

という関係が見られ、  $\beta \sim 1$  となる。この関係は予想 [57] と一致している。境界領域 ( $\epsilon_t < \epsilon < \epsilon_{strong}$ ) では上のような関係は正しくない。これは次節に述べるような事情による。

## 4.7 境界領域

システムサイズを大きくしていった時、最大リアプノフ数の収束値は、  $\lambda_{local}$  と  $\Lambda$  の大きい方によって決まる傾向があり、  $\lambda_{local}$  と  $\Lambda$  が一致する



結合強度付近で最大リアプノフ数は最小値をとることが分かる(図 4.8)。しかし、詳しく調べると $\lambda_{local}$  と  $\Lambda$  が同程度の値を持つ境界領域でリアプノフ数は、この2つの指数の両方の影響を受けている。これは、中間領域のリアプノフ数が時間的に大きく揺らいでいることによる。

リアプノフ数の揺らぎを調べるために短時間での平均による分布関数の軌道拡大率  $\Lambda(n)$  を計算し、その時系列を見てみた(図 4.10)。ここでは、100 時間ステップで平均した短時間の分布関数の軌道拡大率を用いている。図 4.10の点線は、 $\lambda_{local}$ の値を示している。図 4.10の (b)(c)(d) では短時間の  $\Lambda(n)$  が時間によって $\lambda_{local}$  より大きくなったり小さくなったりしている。

システムサイズを十分の大きくすれば、短時間でのリアプノフ数は  $\Lambda(n) > \lambda_{local}$  となる時間には  $\Lambda(n)$  によって決まり  $\Lambda(n) > \lambda_{local}$  となる時間には  $\lambda_{local}$  によって決まると推論できる。従って、 $\Lambda$  と  $\lambda_{local}$  のどちらよりも大きい値に近付いていく。

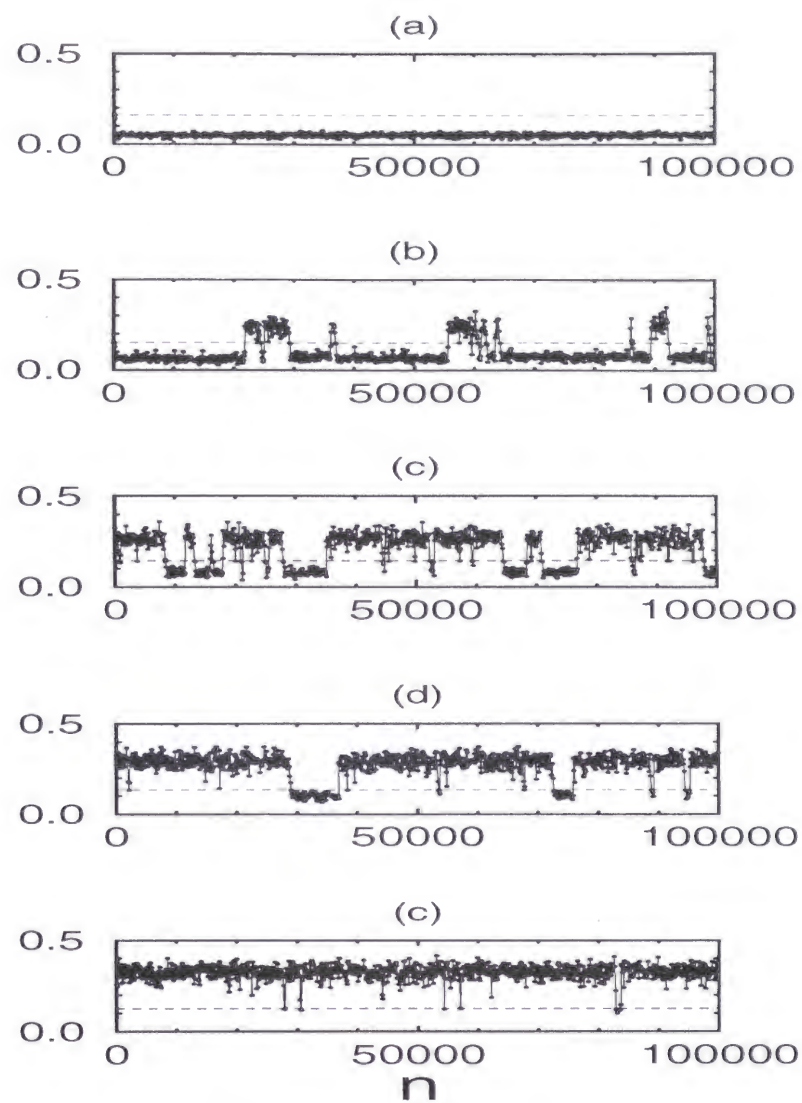
## 4.8 考察

システムサイズの違いに対するリアプノフ数の変化からデシンクロナイズ状態を境界領域を除けば2つの相に分類することができる。結合の弱い方の相では、リアプノフスペクトルをスケールリングすることでシステムサイズに依らないスペクトルを得ることができる。一方、結合の強い方の相では同様のスケールリングを施すと最大リアプノフ数に対応する部分だけがシステムサイズに依存するシンギュラリティを持つスペクトルが得られる。

分布関数の形による分類と比較すると、結合の弱い方の相はバンドなし状態と2バンド状態の領域に対応している。バンドなし状態では、平均場の運動小さい。従って、エレメントはおよそ(2.9)平均場の時間平均の分だけ適当に平行移動したを写像

$$(1 - \epsilon)(1 - a|x|) + \epsilon(h_n) \quad (4.16)$$

に従っている。この写像の傾きの絶対値は  $a(1 - \epsilon)$  になっている。よってリアプノフ数はこの傾きから決まると考えられる。また、2バンド状態でもエレメントに従っている写像がバンドカオスになっており平均場がおよそ2周期の運動をしているというローカルダイナミクスによる性質を除けばバンドなし状態と同じ事情であるといえる。よって、この場合もリアプノフ数がエレメントを記述する写像の傾きによって決まる。



Figure

4.10:  $\Lambda(n)$  の 時間変化を図示。 $\epsilon$ は上から 0.41, 0.415, 0.42, 0.425, 0.43

一方、結合の強い方の相は、1バンド状態に対応している。1バンド状態では、平均場自体が大きく運動しているおり、結合の弱い時のようにエレメントのダイナミクスを平均場から分離して考えることはできない。従って、最大リアプノフ数は平均場のダイナミクスの軌道不安定性によって決まると考えられる。

境界領域は1バンド状態と2バンド状態が時間的に共存している場合に対応している。1バンド状態になっている時間帯では強結合相と同じ性質を持ち、2バンド状態になっている時間帯では弱結合相の性質を持つ。

リアプノフスペクトルに集団運動の兆候が現れるためにはローカルなダイナミクスが持つ軌道発散率より集団運動に由来する軌道発散率が必要であることが示唆される。

# Chapter 5

## 議論とまとめ

### 5.1 議論

ここまで大域結合テント写像を用いて大自由度カオスの集団運動について考察した。大域結合テント写像は、すべてのエレメントの写像の傾きが時間に依らず一定であり、クラスター状態を持たないという特徴を持つ。この特徴は、ローカルなカオスのダイナミクスの指数的発散率が一様に与えられていることを意味している。この場合には、ローカルな軌道発散率が定義することができる。しかし、一般の大域結合系ではローカルな指数的発散率は一様ではなく、エレメントの値によってその指数的発散率は変わる。従って、ローカルな軌道発散率を厳密に定義することは難しい。例えば、大域結合ロジスティック写像のクラスターがない状態でのリアプノフ数でも部分的には同じような振舞いが見られるが、詳細は研究の途中である。

### 5.2 まとめ

大自由度カオスの集団運動に関する研究を行なった。大自由度カオスでは、システムサイズの増加に従い系の運動の次元が大きくなり、複雑になるといえる。運動の次元は示量変数となっている。しかし、集団としての運動にはシステムサイズに依らない性質を持ち、むしろシステムサイズの大きくなることにより集団運動の特質が顕著になる。

本論文では、大域テント写像を用いた。3章でシステムサイズを無限大にして分布関数による記述を行ない、分布関数の固定点の安定性解析を試みた。4章ではリアプノフ解析を行ない、その集団運動との関係を

調べた。

結合の弱い領域では、スケーリングすることでリアプノフスペクトルからシステムサイズに依らない関数を得ることができる。この領域でも振幅の小さな集団運動が存在するが集団運動とリアプノフスペクトルからスケーリングした関数との関係は明らかではない。一方、結合の強い領域では同じようにスケールしても最大リアプノフ数にシンギュラリティが残る。このシンギュラリティは、システムサイズに依らない平均場のカオス的な振舞いによるものである。

この2通りの集団運動の違いは、分布関数の軌道発散率とローカルな軌道発散率の大小による。分布関数の軌道発散率は、平均場のリアプノフ数に対応している。このように全体と要素との競合によりリアプノフスペクトルのシンギュラリティの有る無しが決まることが分かった。



## Appendix A

### ランダム近似によるリアプノフ数の計算

式 (4.9)(4.11) のような仮定をした時のリアプノフ数の計算する。リアプノフ数は、ヤコビ行列の積

$$\bar{A} = \prod_{n=1}^{n_c} A_n \quad (\text{A.1})$$

の  $n_c \rightarrow \infty$  での固有値の対数から与えられる。式 (4.6) より

$$\bar{A} = \prod_{n=1}^{n_c} (A_n^1 + A_n^2) \quad (\text{A.2})$$

となる。

$$B_n^1 = \begin{pmatrix} s_n(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_n(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n(N) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$B_n^2 = \begin{pmatrix} s_n(1) & s_n(1) & \dots & s_n(1) \\ s_n(2) & s_n(2) & \dots & s_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n(N) & s_n(N) & \dots & s_n(N) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

とおくと、 $A_n^1 = a(1 - \epsilon)B_n^1$ ,  $A_n^2 = \frac{\epsilon a}{N}B_n^2$  となり、

$$\bar{A} = \prod_{n=1}^{n_c} (a_* B_n^1 + \epsilon_* B_n^2) \quad (\text{A.5})$$

と書ける。ここで  $a_* = a(1 - \epsilon)$ ,  $\epsilon_* = \epsilon a/N$  とした。この式を  $\epsilon_*$  で展開すると

$$\begin{aligned}
\bar{A} = & a_*^{n_c} \prod_{n=1}^{n_c} B_n^1 \\
& + a_*^{n_c-1} \epsilon_* \sum_{k=1}^{n_c} \left( \prod_{n=k+1}^{n_c} B_n^1 \right) B_k^2 \left( \prod_{n=1}^{k-1} B_n^1 \right) \\
& + a_*^{n_c-2} (\epsilon_*)^2 \sum_{k_1=1}^{n_c-1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n_c} \left( \prod_{n=k_2+1}^{n_c} B_n^1 \right) B_{k_2}^2 \\
& \quad \left( \prod_{n=k_1+1}^{k_2-1} B_n^1 \right) B_{k_1}^2 \left( \prod_{n=1}^{k_1-1} B_n^1 \right) \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{A.6}$$

となる。

$$\bar{s}_{k_1}^{k_2}(i) \equiv \prod_{n=k_1}^{k_2} s_n(i) \tag{A.7}$$

とおく。 $\bar{s}(i) = \pm 1$  となっている。

$$S = \begin{pmatrix} \bar{s}_1^{n_c}(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{s}_1^{n_c}(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{s}_1^{n_c}(N) \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

とおくと式 (A.6) の右辺第 1 項は、

$$a_*^{n_c} \prod_{n=1}^{n_c} B_n^1 = a_*^{n_c} S \tag{A.9}$$

となる。右辺第 2 項の和の中の式は、

$$\begin{aligned}
& \left( \prod_{n=k+1}^{n_c} B_n^1 \right) B_k^2 \left( \prod_{n=1}^{k-1} B_n^1 \right) = \\
& \begin{pmatrix} S_{11} \bar{s}_1^{k-1}(1) \bar{s}_1^{k-1}(1) & S_{11} \bar{s}_1^{k-1}(1) \bar{s}_1^{k-1}(2) & \dots & S_{11} \bar{s}_1^{k-1}(1) \bar{s}_1^{k-1}(N) \\ S_{22} \bar{s}_1^{k-1}(2) \bar{s}_1^{k-1}(1) & S_{22} \bar{s}_1^{k-1}(2) \bar{s}_1^{k-1}(2) & \dots & S_{22} \bar{s}_1^{k-1}(2) \bar{s}_1^{k-1}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{NN} \bar{s}_1^{k-1}(N) \bar{s}_1^{k-1}(1) & S_{NN} \bar{s}_1^{k-1}(N) \bar{s}_1^{k-1}(2) & \dots & S_{NN} \bar{s}_1^{k-1}(N) \bar{s}_1^{k-1}(N) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

と計算できる。式 (4.9) の仮定より  $i \neq j$  の時に

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n_c} \bar{s}_1^{k-1}(i) \bar{s}_1^{k-1}(j) \right\rangle = \frac{1 - (2P_{ij} - 1)^{n_c}}{2 - 2P_{ij}} \rightarrow \frac{1}{2 - 2P_{ij}} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \sum_{k=1}^{n_c} \bar{s}_1^{k-1}(i) \bar{s}_1^{k-1}(j) \right)^2 \right\rangle &= n_c \frac{P_{ij}}{1 - P_{ij}} + \frac{1 - 2P_{ij}}{2(1 - P_{ij})^2} + \frac{(2P_{ij} - 1)^{n_c+1}}{2(1 - P_{ij})^2} \\ &= O(n_c) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ここで  $\langle \rangle$  は、期待値を表す。 $i \neq j$  の時は  $|1 - 2P_{ij}| < 1$  であるから  $n_c$  を大きくすると

$$\frac{1}{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \bar{s}_1^{k-1}(i) \bar{s}_1^{k-1}(j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{n_c}}\right) & (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

となる。これは (A.6) の右辺第二項は  $i$  行  $j$  列に他ならないから、 $n_c$  を無限大にする極限でその非対角項は無視できる。すなわち、

$$\frac{1}{n_c} \sum_{k=1}^{n_c} \left( \prod_{n=k+1}^{n_c} B_n^1 \right) B_k^2 \left( \prod_{n=1}^{k-1} B_n^1 \right) = S \quad (\text{A.14})$$

が成り立ち、従って (A.6) の右辺第二項は

$$a_*^{n_c-1} \epsilon_* n_c S \quad (\text{A.15})$$

となる。

同様に式 (A.6) の第  $L+1$  項を計算するとその  $i$  行  $j$  列は

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^{n_c-L+1} \sum_{k_2=k_1+1}^{n_c-L+2} \dots \sum_{k_L=k_{L-1}+1}^{n_c} &\left[ \bar{s}_{k_L}^{n_c}(i) \bar{s}_{k_L}^{n_c}(j) \right. \\ &\sum_{i_{L-1}=1}^N \left\{ \bar{s}_{k_{L-1}}^{k_L-1}(i_{L-1}) \bar{s}_{k_{L-1}}^{k_L-1}(j) \right\} \\ &\vdots \\ &\sum_{i_2=1}^N \left\{ \bar{s}_{k_2}^{k_3-1}(i_2) \bar{s}_{k_2}^{k_3-1}(j) \right\} \\ &\left. \sum_{i_1=1}^N \left\{ \bar{s}_{k_1}^{k_2-1}(i_1) \bar{s}_{k_1}^{k_2-1}(j) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となる。この式は厳密に正しい式である。ここで式 (4.11) の仮定を使うと、式 (A.16) は

$$\sum_{k=1}^{n_c-L} n_{c-k} C_L \bar{s}_{k-1}(i) \bar{s}_{k-1}(j) \quad (\text{A.17})$$

となる。この式は  $L$  が小さい場合には (4.11) の仮定が正しくないとしても良い近似である。さらに第二項の計算と同じようにすると

$$\frac{1}{n_c C_{l+L}} \sum_{k=1}^{n_c-L} n_{c-k} C_L \bar{s}_{k-1}(i) \bar{s}_{k-1}(j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ O\left(\frac{1}{\sqrt{n_c}}\right) & (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

となっており、やはり非対角項を無視することでき

$$\bar{A} = a_*^{n_c} \sum_{n=0}^{n_c} n_c C_n \left(\frac{\epsilon_*}{a_*}\right)^n S \quad (\text{A.19})$$

となる。この式を書き変えると

$$\bar{A} = a_*^{n_c} \left(1 + \frac{\epsilon_*}{a_*}\right)^{n_c} S \quad (\text{A.20})$$

となり、リアプノフ数は、この行列の固有値の対数を時間  $n_c$  で割ったものであるから、

$$\begin{aligned} \lambda &= \log(a_*) + \log\left(1 + \frac{\epsilon_*}{a_*}\right) \\ &= \log(a(1 - \epsilon)) + \log\left(1 + \frac{\epsilon}{N(1 - \epsilon)}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

となり、式 (4.12) が求まる。(4.11) と仮定して計算したためリアプノフ数がすべて縮退して同じ値に求まった。ランダム行列から数値計算でリアプノフ数を求めるとリアプノフ数は縮退していない。 $\epsilon$  が小さい場合には、(A.6) の高次の項が効いてこないでその誤差は小さい。

# Bibliography

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turburence* (Springer, Berlin 1984)
- [2] P. Manneville, *Dissipative Structures and Weak Turbulence* (Academic Press, Boston 1992)
- [3] K. Kaneko, *Theory and applications of coupled map lattice* (John Willey & Sons 1993)
- [4] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press 1993)
- [5] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems an introduction* (Cambridge University Press 1993)

## Globally Coupled Maps

- [6] K. Wiesenfeld and P. Hadley, Attractor Crowding in Oscillator Arrays, *Phys. Rev. Lett*, **62** (1989) 1335.
- [7] K. Kaneko, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 219.
- [8] K. Kaneko, Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements, *Physica D* **41** (1990) 137.
- [9] K. Kaneko, Globally cpupled circle maps, *Physica D* **54** (1991) 5.
- [10] K. Kaneko, Partion complexity in a network of chaotic elements, *J. Phys. A* **24** (1991) 2107.
- [11] K. Kaneko, Relevance of dynamic clustering to biological networks *Physica D* **75** (1994) 55.
- [12] K. Kaneko, Information cascade with marginal stability in a network of chaotic elements, *Physica D* **77** (1994) 456.
- [13] F. Xie and H.A. Cerdeira, Coherent-ordered transition in chaotic globally coupled maps, *Phys. Rev. E* **54** (1996) 3235.



- [14] F. Xie and G. Hu, Clustering dynamics in globally coupled map lattices, preprint, chao-dyn/9701001.
- [15] A. Crisanti, M. Falcioni, and A. Vulpiani, Broken Ergodicity and Glassy Behavior in a Deterministic Chaotic Map, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 612.
- [16] D. Dominguez and H.A. Cerdeira, Turbulence, chaos and noise in globally coupled Josephson junction arrays, *Phys. Lett. B* **200** (1995) 43.

### collective motions (GCM)

- [17] K. Kaneko, Globally Coupled Chaos Violates the Law of Large Numbers but Not the Central-Limit Theorem, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1391
- [18] K. Kaneko, Mean field fluctuation of a network of chaotic elements - Remaining fluctuation and correlation in the large size limit, *Physica D* **55** (1992) 368.
- [19] K. Kaneko, Remarks on the mean field dynamics of networks of chaotic elements, *Physica D* **86** (1995) 158.
- [20] G. Perez and H.A. Cerdeira, Instabilities and nonstatistical behavior in globally coupled systems, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 7492.
- [21] G. Perez, S. Sinha and A. Cerdeira, Order in the turbulent phase of globally coupled maps, *Physica D* **63** (1993) 341.
- [22] M. Ding and L.T. Wille, Statistical properties of spatiotemporal dynamical systems, *Phys. Rev. E* **48** (1993) 1605
- [23] A.S. Pikovsky and J. Kurths, Do Globally Coupled Maps Really Violate the Law of Large Numbers?, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 1644.
- [24] A.S. Pikovsky and J. Kurths, Collective behavior in ensembles of globally coupled maps, *Physica D* **76** (1994) 411.
- [25] T. Shinbrot, Synchronization of coupled maps and stable windows, *Phys. Rev. E* **50** (1994) 3230.
- [26] W. Just, Bifurcations in globally coupled map lattices, *J. Stat. Phys.* **79** (1995) 429.
- [27] W. Just, Globally coupled maps: phase transitions and synchronization, *Physica D* **81** (1995) 317.
- [28] S.V. Ershov and A.B. Potapov, On mean field fluctuations in globally coupled maps, *Physica D* **86** (1995) 523.

- [29] T. Shibata and K. Kaneko, Heterogeneity Induced order in Globally Coupled Chaotic Systems, preprint.

### collective motions (others)

- [30] H. Chaté and P. Manneville, Emergence of effective low-dimensional dynamics in the macroscopic behaviour of coupled map lattices, *Europhys. Lett.* **17** (1992) 291.
- [31] H. Chaté and P. Manneville, Collective Behaviors in Spatially Extended Systems with Local Interactions and Synchronous Updating, *Prog. Theor. Phys.* **87** (1992) 1.
- [32] H. Chaté and P. Manneville, Collective behaviors in coupled map lattices with local and nonlocal connections, *Chaos* **2** (1992) 302.
- [33] H. Chaté, A. Lemaitre, P. Marcq, and P. Manneville, Non-trivial collective behavior in extensively-chaotic dynamical systems: an update, *Physica A* **224** (1995) 447.
- [34] H. Chaté, G. Grinstein, and L.H. Tang, Long-Range Correlations in Systems with Coherent (Quasi)periodic Oscillations *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 912.
- [35] A. Lemaitre, H. Chaté and P. Manneville, Cluster Expansion for Collective Behavior in Discrete-Space Dynamical Systems, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 486.
- [36] P. Marcq, H. Chaté and P. Manneville, Universal Critical Behavior in Two-Dimensional Coupled Map Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4003.
- [37] H. Sakaguchi, Kolmogorov-Sinai Entropy of the Ising Model, *Prog. Theor. Phys.* **86** (1991) 303.
- [38] H. Sakaguchi, Oscillatory phase transitions in coupled Bernoulli map lattices, *Phys. Lett. A* **180** (1993) 235.
- [39] F. Kaspár and H.G. Schuster, Scaling at the onset of spatial disorder in coupled piecewise linear maps, *Phys. Lett. A* **113** (1986) 451.
- [40] N. Nakagawa and K. Kuramoto, Collective chaos in a Population of globally coupled oscillators, *Prog. Theor. Phys.* **89** (1993) 313.
- [41] N. Nakagawa and K. Kuramoto, From collective oscillations to collective chaos in globally coupled oscillator system, *Physica D* **75** (1994) 74.
- [42] S. Sinha, D. Biswas, M. Azam, and S.V. Lawande, Nonstatistical behavior of higher-dimensional coupled systems, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 3193.

- [43] S.Sinha, D.Biswas, M.Azam, and S.V.Lawande, Local-to-global coupling in chaotic maps, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 6242.
- [44] P.-M. Binder and V. Privman, Second-order dynamics in the collective temporal evolution of complex systems, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 3830.
- [45] J.A.C. Gallas, H.J. Herrmann, H. Chaté, P. Manneville, and P. Grassberger, Comment on 'Second-order dynamics in the collective temporal evolution of complex systems', *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1955.
- [46] J. Miller and D.A. Huse, Macroscopic equilibrium from microscopic irreversibility in a chaotic coupled-map lattice, *Phys. Rev. E* **48** (1993) 2528.
- [47] C. Boldrighini, L.A. Bunimovich, G. Bunimovich, S. Frigio and A. Pellegrinotti, Ising-type transitions in coupled map lattices, *J. Stat. Phys.* **80** (1995) 1185.
- [48] J. Losson and M.C. Mackey, Statistical cycling in coupled map lattice, *Phys. Rev. E* **50** (1994) 843.
- [49] J. Losson, J. Milton and M.C. Mackey, Phase transitions in networks of chaotic elements with short and long range interactions *Physica D* **81** (1995) 177.
- [50] M.G. Cosenza, Collective behavior of coupled chaotic maps, *Phys. Lett. A* **204** (1994) 128.

### Lyapunov exponents

- [51] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents from a Time Series *Physica D* **16** (1985) 258.
- [52] K. Kaneko, Lyapunov Analysis and Information Flow in Coupled Map Lattices *Physica D* **23** (1989) 436.
- [53] R. Livi, A. Politi, S. Ruffo and A. Vulpiani, Lyapunov Exponents in High-Dimensional Symplectic Dynamics, *J. Stat. Phys.* **46** (1987) 147.
- [54] S. Isola, A. Politi, S. Ruffo and A. Torcini, Lyapunov spectral of coupled map lattices, *Phys. Lett. A* **143** (1990) 365.
- [55] R. Livi, A. Politi and S. Ruffo, Scaling-law for the maximal Lyapunov exponent, *J. Phys. A* **25** (1992) 4813.
- [56] E.J. Ding, and Y.N. Lu, Universal scaling behavior in the weakly coupled map lattice, *Phys. Lett. A* **161** (1992) 357.

- [57] W. Yang, E.J. Ding and M. Ding, Universal Scaling Law for the Largest Lyapunov Exponent in Coupled Map Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 1808.
- [58] H. Chaté, Lyapunov Analysis of Spatiotemporal Intermittency, *Europhys. Lett.* **21** (1993) 419.
- [59] N. Nakagawa and K. Kuramoto, Anomalous Lyapunov spectrum in globally coupled oscillators, *Physica D* **80** (1995) 307.
- [60] S. Lepri, A. Politi and A. Torcini, Chronotopic Lyapunov Analysis. I. A Detailed Characterization of 1D Systems, *J. Stat. Phys.* **82** (1996) 1429.
- [61] C.S. O'Hern, D.A. Egolf and H.S. Greenside, Lyapunov spectral analysis of a nonequilibrium Ising-like transition, *Phys. Rev. E* **53** (1996) 3374.

#### coupled maps

- [62] T. Yamada and H. Fujisaka, Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator systems. II, *Prog. Theor. Phys.* **7** (1983) 1240.
- [63] T. Yamada and H. Fujisaka, Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator systems. III, *Prog. Theor. Phys.* **72** (1984) 885.
- [64] T. Yamada, Mapping Approach to the Dissipative Dynamical Systems, *Recent Studies on TURBULENT PHENOMENA* (1985) 91.
- [65] H. Sakaguchi, Phase Transitions in Coupled Bernoulli Maps, *Prog. Theor. Phys.* **80** (1988) 7.
- [66] A.S. Pikovsky and P. Grassberger, Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors, *J. Phys. A* **24** (1991) 4587.
- [67] J. Losson and M.C. Mackey, Coupled induced statistical cycling in two diffusively coupled maps, *Physica D* **72** (1994) 324.
- [68] Y. Maistrenko and T. Kapitaniak, Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps, *Phys. Rev. E* **54** (1996) 3285.

#### system with global noise

- [69] S. Sinha, Noisy Uncoupled Chaotic Map Ensembles Violate the Law of Large Numbers, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 3306.
- [70] A.S. Pikovsky, Comment on "Noisy Uncoupled Chaotic Map Ensembles Violate the Law of Large Numbers" *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 653.

- [71] M. Griniasty and V. Hakim, Correlations and dynamics in ensembles of maps: Simple models, Phys. Rev. E **49** (1994) 2661.

### piecewise linear maps

- [72] H. Shigematsu, H. Mori, T. Yoshida and H. Okamoto, Analytic Study of Power Spectra of the Tent Maps near Band-Splitting Transition, J. Stat. Phys. **30** (1983) 649.
- [73] T. Yoshida, H. Mori and H. Shigematsu, Analytic Study of Chaos of the Tent Map: Band Structures, Power Spectra, and Critical Behaviors, J. Stat. Phys. **31** (1983) 279.
- [74] M. Dörfle, Spectrum and eigenfunctions of the Frobenius-Perron operator of the tent map, J. Stat. Phys. **40** (1985) 93.